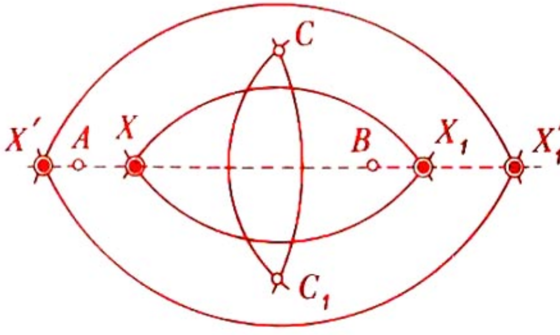
Lecciones populares de matemáticas

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS MEDIANTE UN COMPÁS

A. N. Kostovski



Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMATICAS

A. N. KOSTOVSKI

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS MEDIANTE UN COMPÁS

Segunda edición

EDITORIAL MIR

MOSCÚ

IMPRESO EN LA URSS

Traducido del ruso por G. Lozhkin

На испанском языке

Primera edición 1980

Segunda edición 1984

INDICE

PREFACIO

El autor del presente folleto reiteradamente daba las lecciones dedicadas a la teoría de construcciones geométricas, a los participantes de las olimpiadas matemáticas las que, al empezar desde el año 1947, se organizan anualmente para los alumnos de escuelas secundarias en la ciudad de Lvov. Estas lecciones sirvieron de base para escribir el primer capítulo de la obra dada.

En el segundo capítulo se exponen las investigaciones del autor referentes a las construcciones geométricas que se realizan mediante un compás con abertura limitada de sus varillas.

El folleto propuesto está escrito para amplios círculos de lectores. Tiene por objeto de ayudar a maestros y alumnos de grados superiores de escuela media a familiarizarse con las construcciones geométricas que se cumplen con ayuda de un sólo compás. Este texto puede servir de material didáctico en trabajo de los círculos matemáticos escolares. Además, lo pueden usar los estudiantes de las facultades de física y matemáticas de los centros de enseñanza superior pedagógicos y las universidades al estudiar el curso de matemática elemental.

El autor considera por su deber de expresar la más cincera gratitud al profesor A. S. Kovañko, a los docentes V. F. Rogachenko y I. F. Teslenko que han examinado cuidadosamente el manuscrito y han dado una serie de consejos e indicaciones valiosos.

INTRODUCCIÓN

Las construcciones geométricas es un factor esencial de estudios matemáticos; también éstas representan un arma potente en las investigaciones geométricas.

La limitación tradicional en útiles usados para las construcciones geométricas sólo por el compás y la regla asciende a la remota antigüedad. La célebre geometría de Euclides (euclidiana) (III siglo a.n.e.) se fundó sobre las construcciones geométricas cumplidas mediante el compás y la regla; además el compás y la regla se consideraron como herramientas equivalentes; fue completamente indiferente cómo se realizaban unas construcciones separadas: con ayuda del compás y la regla, por medio de un compás o de una regla solamente.

Ya hace mucho se notó que el compás es una herramienta más precisa y más perfecta que la regla y que es posible cumplir ciertas construcciones, valiéndose sólo del compás y sin recurrir a la regla, por ejemplo, dividir una circunferencia en seis partes iguales; trazar un punto simétrico al punto dado respecto a la recta dada, etc. Se prestó la atención al hecho de que para grabar en las placas metálicas finas, para trazar los círculos primitivos de los instrumentos astronómicos se emplea, como regla, sólo el compás. Lo último probablemente sirvió de impulso para investigar las construcciones geométricas realizadas valiéndose de un sólo compás.

En el año 1797 el matemático italiano, profesor de la universidad en Pavia Lorenzo Mascheroni publicó un gran trabajo "Geometría del compás" que después fue traducido al francés y alemán. En esta obra se demostró la propuesta siguiente:

Todos los problemas de construcción que se resuelven con ayuda del compás y la regla, pueden resolverse con precisión empleando sólo un compás.

En 1890 A. Adler demostró esta afirmación por un procedimiento original con ayuda de la inversión. También propuso el método general para resolver los problemas geométricos de construcción por medio de un compás solamente. En el año 1928 el matemático danés Guelmslev encontró en una tienda de libros en Copenhague el libro de G. Mohr titulado "Euclides danés" y publicado en 1672 en Amsterdam. En la primera parte de este libro se da la solución total del problema de Mascheroni. De este modo mucho tiempo antes de Mascheroni fue mostrado que todas las construcciones geométricas en las que se usan el compás y la regla, pueden cumplirse valiéndose sólo de un compás.

La parte de geometría en la que se estudian las construcciones geométricas cumplidas mediante un compás, se llama g e o m e t r í a d e l c o m p á s. En 1833 el geómetra suizo Jacobo Steiner publicó su obra "Construcciones geométricas realizadas con ayuda de una línea recta y un círculo fijo" en la que examinó de modo más completo las construcciones hechas con una regla. El resultado principal de este trabajo es posible expresar en forma de la propuesta siguiente:

Cada problema de construcción resoluble por medio del compás y la regla, puede solucionarse valiéndose de una sola regla, si en el plano del dibujo se da una circunferencia constante y su centro.

De este modo, para que la regla sea equivalente al compás, es suficiente usar s ó l o u n a v e z el compás.

El gran matemático ruso N. I. Lobachevski en primera mitad del siglo XIX descubrió nueva geometría que luego recibió el nombre de la geometría no euclidiana o hiperbólica de Lobachevski. En último tiempo, gracias a los trabajos de un número grande de científicos, sobre todo, de los soviéticos, se desarrolla impetuosamente la teoría de las construcciones geométricas en el plano de Lobachevski.

A. S. Smogorzhevski, V. F. Rogachenko, K. K. Mokrischev y otros matemáticos en sus obras examinaron las construcciones en el plano de Lobachevski sin ayuda de la regla, además se demostró la posibiladad de cumplir las construcciones análogas a las de Mascheroni en el plano euclidiano.

La preponderancia de las investigaciones dedicadas a los problemas generales motivó el hecho de que con las obras de los científicos soviéticos se formuló una teoría suficientemente completa y precisa de las construcciones geométricas en el plano de Lobachevski que es poco probable que ceda su conclusión ante la teoria de las construcciones geométricas en el plano euclidiano.

CAPITULO I

CONSTRUCCIONES CON UN SÓLO COMPÁS

§ 1. CÓMO ES POSIBLE RESOLVER LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE CONSTRUCCIÓN VALIÉNDOSE SÓLO DE UN COMPÁS. TEOREMA FUNDAMENTAL

En el párrafo dado se demostrará el teorema fundamental de la geometría del compás para lo que es necesario examinar previamente las soluciones de algunos problemas de construir utilizando sólo un compás.

Al usar sólo un compás, no podremos, claro está, trazar una línea recta contínua prefijada por dos puntos, aunque demostraremos más adelante còmo, empleando sólo un compás, se puede marcar uno, dos y, en general, cualquier número de puntos que se situen de modo cualquier denso en la recta dada[1]. Por consiguiente, el trazado de una línea recta no se asegura completamente por la teoría de Mohr – Mascheroni.

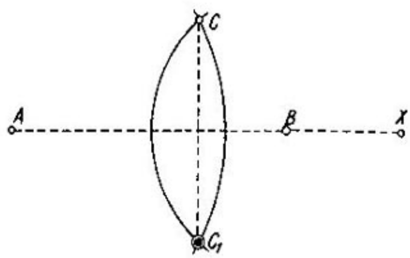
En la geometría del compás una línea recta o un segmento se determina por dos puntos y no se prefija en forma de una línea recta continua (trazada con ayuda de una regla). LA CONSTRUCCIÓN DE UNA LÍNEA RECTA SE CONSIDERA POR TERMINADA EN EL MOMENTO EN QUE SE ENCUENTREN DETERMINADOS CUALESQUIER DOS DE SUS PUNTOS.

Convengamos en ulterior escribir la frase "Desde el punto A como centro, describimos la· circunferencia del radio BC (o tracemos el arco) en forma abreviada de este modo: "Describimos la circunferencia (A, BC)", o "Trazamos la circunferencia (A, BC)" o aun más brevemente: "Describimos (A, BC)". En vez del símbolo (A, AB) escribiremos (A, B).

[1] Permaneciendo sobre el punto de vista practico no hay razones para considerar que la recta está construida, si estan obtenidos algunos de sus puntos.

Para fines demostrativos a pesar de todo trazaremos en el dibujo las líneas de trazos rectas (estas rectas no participan en la construcción).

PROBLEMA 1. Construir un punto simétrico al dado C respecto a una recta dada AB.



DIBUJO 1.

Construcción. Describamos las circunferencias (A, C) y (B, C), es decir, tomando los puntos A y B como centros, trazamos las circunferencias que pasen por el punto C (dibujo 1). En la intersección de las circunferencias aducidas obtenemos el punto C_1. El punto C_1 es el que hemos buscado.

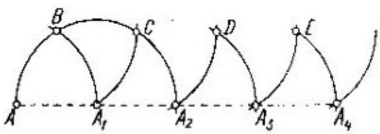
Observación. Para determinar si los tres puntos dados A, B, X se hallan sobre una línea recta, es necesario tomar fuera de la recta AB un punto arbitrario C y construir el punto C_1 simétrico al primero. Es evidente que el punto X se encuentra en la recta AB, si los segmentos CX y C_1X son iguales entre sí (dibujo 1).

PROBLEMA 2. Trazar un segmento 2, 3, 4 y en general n veces mayor que el segmento dado $AA_1 = r$ (n es un número natural cualquiera).

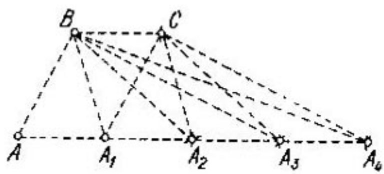
Construcción (1^r procedimiento). Conservando la abertura de compás invariable e igual a r, describamos la circunferencia (A_1, r) y determinemos punto A_2 que es diametralmente opuesto al punto A, para lo que trazamos las cuerdas $AB = BC = CA_2 = r$ (dibujo 2). El segmento $AA_2 = 2r$. Describamos luego la circunferencia (A_2, r) que intersecará la circunferencia (C, r) en el punto D. En la intersección de las circunferencias (D, r) y

(A_2, r) obtenemos el punto A_3. El segmento $AA_3 = 3r$, etc. Al realizar las construcciones indicadas n veces, tracemos el segmento $AA_n = nr$.

La validez de nuestra construcción se deduce del hecho de



DIBUJO 2.



DIBUJO 3.

que el compás con abertura igual al radio de la circunferencia la divide en seis partes iguales.

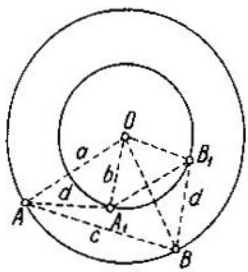
Construcción (2° procedimiento). Tomamos fuera de la recta AA_1 un punto arbitrario B y trazamos las circunferencias (A_1, AB) y (B, r) hasta que se encuentren en el punto C (dibujo 3). Si ahora se trazan las circunferencias (A_1, r) y (C, BA_1), éstas se cortarán en el punto A_2. El segmento $AA_2 = 2r$. Al describir las circunferencias (A_2, r) y (C, BA_2), obtenemos el punto A_3. El segmento $AA_3 = 3r$, etc.

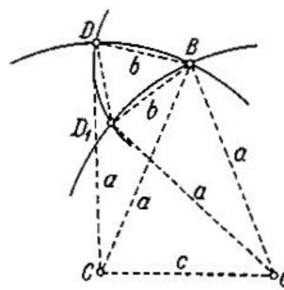
El carácter correcto de nuestra construcción se deduce inmediatamente del hecho de que las figuras $ABCA_1$, A_1BCA_2, A_2BCA_3, ... son paralelógramos.

PROBLEMA 3. Trazar un segmento que sea cuarto y proporcional a los tres segmentos dados a, b y c.

Construcción (1ᵉʳ procedimiento). Para $c < 2a$.

De un punto arbitrario O en el plano, como centro, describamos dos circunferencias concéntricas con radios a y b (dibujo 4). En la circunferencia (O, a) tracemos la cuerda $AB = c$ y, tomando un radio arbitrario d, describamos dos circunferencias (A, d) y (B, d) que intersecarán la circunferencia (O, b) en los puntos A_1 y B_1. El segmento A_1B_1 es cuarto y proporcional a los tres segmentos dados.





DIBUJO 4.

Demostración. Los triángulos AOA_1 y BOB_1 son iguales según tres lados por lo que $\sphericalangle AOA_1 = \sphericalangle BOB_1$. De aquí $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1OB_1$ y los triángulos isósceles AOB y A_1OB_1 son semejantes.

Por consiguiente,

$$a : b = c : A_1B_1.$$

Construcción (2° procedimiento). Siendo $c \geqslant 2a$. Si resulta que $b < 2a$, construyamos cuarto segmento proporcional a los segmentos a, c y b; en caso contrario tracemos el segmento na (problema 2), tomando además n tal que $c < 2na$ [1] (o $b < 2na$). Primero tracemos el segmento y que es cuarto y proporcional a los segmentos

[1] El segmento $2na > c$ encontramos por el procedimiento siguiente. Tracemos el segmento $a_1 = 2a$ (problema 2). Del punto arbitrario O_1 en el plano describimos la circunferencia (O_1, c) y en la dirección arbitraria tracemos los segmentos $O_1A_1 = a_1$, $O_1A_2 = 2a_1$, $O_1A_3 = 3a_1$, etc. (problema 2); después de hacer un número final de pasos lleguemos al punto A_n que se encontrará fuera de la circunferencia (O_1, c). Es evidente que el segmento $O_1A_n = na_1 = 2na > c$.

na, b y c. Si ahora trazamos el segmento $x = ny$ (problema 2), entonces obtendremos el cuarto segmento proporcional a los tres segmentos dados a, b y c.

En realidad,

$$na : b = c : y$$

ó

$$a : b = c : ny.$$

Construcción (3' procedimiento). Cuando $2a > c$.

De los puntos C y C_1 que son extremos del segmento c, describamos las circunferencias de radio a que se cortarán en el punto B. Sea que la circunferencia (B, b) interseque las circunferencias (C, a) y (C_1, a) en los puntos D y D_1. El segmento $DD_1 = x$ es el buscado.

Demostración. Los triángulos isósceles D_1BC_1 y BCD son iguales, por eso $\sphericalangle CBD = \sphericalangle C_1BD_1$. De aquí se deduce que $\sphericalangle CBC_1 = \sphericalangle DBD_1$. De la semejanza de los triángulos isósceles CBC_1 y DBD_1 resulta que

$$a : b = c : DD_1.$$

En caso de que $c \geqslant 2a$ y $b \geqslant 2a$ al principio tracemos el segmento y que es cuarto y proporcional a los segmentos na, b y $c\,[c < 2na]$; luego encontremos el segmento buscado $x = ny$.

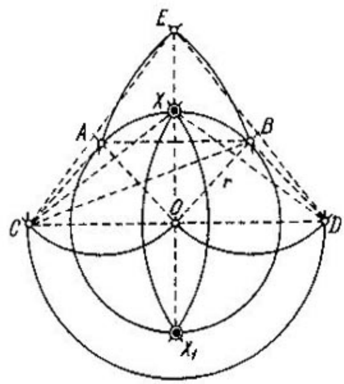
PROBLEMA 4. Dividir el arco AB de la circunferencia por la mitad.

Construcción. Se puede suponer que se conoce el centro O de la circunferencia; más adelante (véase el problema 13) se demostrará cómo se construye el centro de una circunferencia (o de un arco), al usar para esto sólo un compás.

Suponiendo que $OA = OB = r$ y $AB = a$, describamos las circunferencias (O, a), (A, r) y (B, r) y en la intersección obtengamos los puntos C y D (dibujo 5). Tracemos las circunferencias (C, B) y (D, A) hasta su encuentro en el punto E. Si ahora se trazan las circunferencias (C, OE) y (D, OE), entonces en sus intersecciones obtendremos los puntos X y X_1.

El punto X divide el arco AB por la mitad y el punto X_1 divide por la mitad el arco que completa el arco primero hasta la circunferencia total. Cuando la circunferencia (O, A) está trazada, de entre las dos circunferencias (C, OE) y (D, OE) se puede describir sólo una la que en las intersecciones con la circunferencia (O, A) determinará los puntos X y X_1.

Demostración. Las figuras $ABOC$ y $ABDO$ son paralelógramos, por lo tanto los puntos C, O y D se hallan en una recta ($CO \| AB$, $OD \| AB$). De los triángulos isósceles CED y CXD se deduce que $\sphericalangle COE = \sphericalangle COX = 90°$. De este modo, el segmento OX es



DIBUJO 5.

perpendicular a la cuerda AB; por consiguiente, para demostrar que el punto X divide el arco AB por la mitad, es suficiente demostrar que el segmento

$$OX = r.$$

Del paralelógramo $ABOC$ se deduce que

$$OA^2 + BC^2 = 2OB^2 + 2AB^2$$

ó

$$r^2 + BC^2 = 2r^2 + 2a^2,$$

por eso

$$BC^2 = 2a^2 + r^2.$$

Del triángulo rectángulo COE podemos escribir:

$$CE^2 = BC^2 = OC^2 + OE^2,$$

de donde

$$2a^2 + r^2 = a^2 + OE^2$$

y

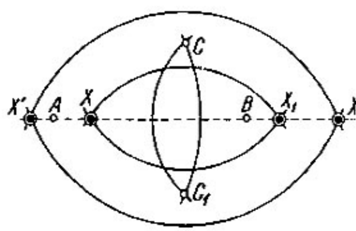
$$OE^2 = a^2 + r^2.$$

Por fin, del triángulo rectángulo COX obtenemos:

$$OX = \sqrt{CX^2 - OC^2} = \sqrt{OE^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 + r^2 - a^2} = r.$$

Como hemos indicado, en la geometría del compás es la regla común de considerar la línea recta como trazada inmediatamente después de que están determinados cualesquier dos de sus puntos. En nuestra exposición ulterior (problemas 24, 25 y otros) necesitaremos trazar con ayuda de un solo compás uno, dos y, en general, cualquier número de puntos de la recta dada. Esta construcción es posible realizarla del modo siguiente.

PROBLEMA 5. En la recta determinada por dos puntos A y B es necesario obtener uno o varios puntos.



DIBUJO 6.

Construcción. Tomemos en el plano, fuera de la recta AB un punto arbitrario C (dibujo 6) y marquemos el punto C_1 que es simétrico al primero respecto a la recta AB (problema 1). Con un radio arbitrario r describamos las circunferencias (C, r) y (C_1, r), en las intersecciones obtendremos los puntos buscados X y X_1 que se hallan sobre la recta dada AB. Cambiando la magnitud del radio r se puede encontrar cualesquier que sean puntos de la recta dada: X', X_1', etc.

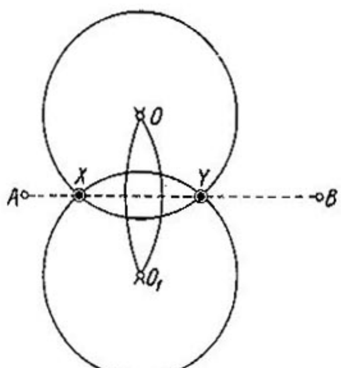
PROBLEMA 6. Trazar los puntos de intersecciónes de la circunferencia dada (O, r) con la recta dada por dos puntos A y B.

Construcción, en caso de que el centro O se yace sobre la recta dada AB[1] (dibujo 7).

Determinemos el punto O_1 que es simétrico al centro O de la circunferencia dada respecto a la recta AB (problema 1). Describamos la circunferencia (O_1, r) que intersecará la circunferencia dada en los puntos buscados X e Y.

La valídez de la construcción se ve evidentemente de la simetría del dibujo respecto a la recta dada AB.

Construcción en el caso en que el centro O de la circunferencia dada se halla sobre la recta AB (dibujo 8).



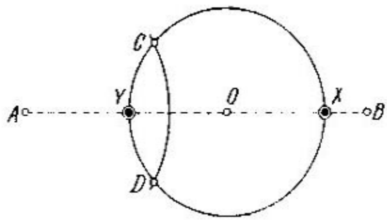
DIBUJO 7.

Al tomar el punto A como centro describamos la circunferencia de radio arbitrario d que intersecará la circunferencia dada en los puntos C y D. Dividamos los arcos CD de la circunferencia (O, r) por las mitades (problema 4). Los puntos X e Y son buscados.

Observación. De la construcción expuesta se deduce:

$$AX = AO + OX \text{ y } AY = AO - OX.$$

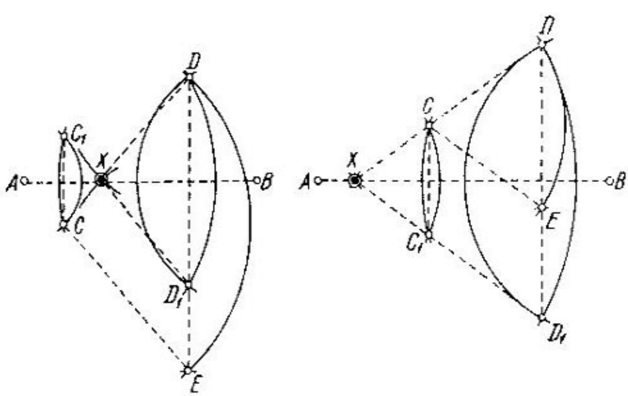
[1] Con ayuda de un solo compás es fácil comprobar si se hallan los tres puntos dados en una recta o no (véase la observación del problema 1).



DIBUJO 8.

PROBLEMA 7. Construir el punto de intersección de dos rectas AB y CD cada una de las cuales queda determinada por dos puntos.

Construcción. Marquemos los puntos C_1 y D_1 simétricos correspondientemente a los puntos C y D respecto a la recta dada AB (dibujo 9). Describamos las circunferencias (D_1CC_1) y (C, D)



DIBUJO 9.

y designamos con E el punto de su intersección. Tracemos el segmento x que es cuarto y proporcional a los segmentos DE, DD_1 y CD (problema 3). Si ahora se describen las circunferencias (D, x) y (D_1, x), entonces en la intersección obtendremos el punto buscado X.

Demostración. Puesto que el punto C_1 es simétrico al punto C y el punto D_1 es simétrico al punto D, es evidente que encontremos el punto de intersección de las rectas dadas, sí encontramos el punto de intersección de las rectas CD y C_1D_1.

La figura CC_1D_1E es paralelógramo, y por consiguiente, los puntos D, D_1 y E se encuentran sobre una recta ($DE \| CC_1$, $DD_1 \| CC_1$). Los triángulos CDE y XDD_1 son semejantes, por lo que

$$DE : DD_1 = CE : D_1X,$$

pero

$$CE = CD = C_1D_1.$$

El segmento $D_1X = x$ es cuarto y proporcional a los segmentos DE, DD_1 y CD.

Cada problema en que para la construcción se usa el compás y la regla en el plano de Euclides siempre se reduce a la solución en un orden determinado de los problemas fundamentales más simples siguientes:

1. Por los dos puntos dados trácese una recta.
2. Desde el punto dado como centro descríbase la circunferencia del radio dado.
3. Determínese los puntos de intersección de las dos circunferencias dadas.
4. Encuéntrese los puntos de intersección de la circunferencia dada y la recta determinada por dos puntos.
5. Hállese los puntos de intersección de las dos rectas cada una de las cuales queda determinada por dos puntos.

Para demostrar que cada problema en cuya construcción se usan el compás y la recta, puede resolverse aplicando sólo el compás, sin usar la regla, es suficiente mostrar que todas estas operaciones fundamentales pueden cumplirse empleando un sólo compás.

Las operaciones segunda y tercera se realizan mediante el compás directamente. El cumplimiento de las demás operaciones fundamentales se aduce en los problemas 5, 6 y 7.

Supongamos que un problema de construcción resoluble con el compás y la regla, hay que solucionar usando un sólo compás. Imaginemos que este problema está resuelto con ayuda del compás y la regla: como resultado la solución del problema se reducirá al cumplimiento de una sucesión finita de las cinco operaciones fundamentales. Si para cumplir cada una de estas operaciones se emplea sólo un compás (problemas 5, 6 y 7), llegaremos a la solución del problema propuesto.

De este modo, *todos los problemas de construcción resolubles con compás y la regla, pueden solucionarse con precisión aplicando sólo un compás.*

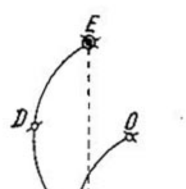
El método aducido de solucionar los problemas geométricos de construcción empleando un sólo compás conduce, como regla, a unas construcciones muy complicadas y voluminosas. Desde el punto de vista teórico este método presenta interés.

§ 2. SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE CONSTRUCCIÓN APLICANDO UN SOLO COMPÁS

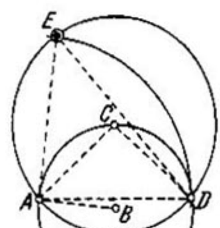
En este párrafo examinaremos la solución de algunos problemas interesantes de la geometría del compás elaborada fundamentalmente en los trabajos de Mohr, Mascheroni y Adler. La solución de algunos de estos problemas nos usaremos en el capítulo segundo.

PROBLEMA 8. Levantar perpendicular al segmento AB en el punto A.

Construcción (1^{r} procedimiento). Con una abertura de compás invariable e igual al segmento arbitrario r, trazamos las circunferencias (A, r) y (B, r) hasta que se encuentren en el punto O. Describimos la circunferencia (O, r) y construimos en ésta el punto E que es diametralmente opuesto al punto B, para lo cual tracemos las cuerdas $CD = DE = r$ (dibujo 10), donde C es el punto



DIBUJO 10.



DIBUJO 11.

de intersección de las circunferencias (B, r) y (O, r). El segmento $AE \perp AB$. Si ponemos $r = AB$, *entonces* $AE = \sqrt{3}\,AB$, el punto C coincidirá con el punto A.

Construcción (2° procedimiento). Describamos la circunferencia (B, A) (dibujo 11), tomamos un punto arbitrario C de ésta y trazamos la circunferencia (C, A). Dado que D es el punto de intersección de estas dos circunferencias. Si ahora se describe la tercera circunferencia (A, D) hasta su intersección con la circunferencia (C, A) en el punto E, entonces el segmento $AE \perp AB$.

Demostración. El segmento AC une los centros de las circunferencias (A, D) y (C, A), DE es su cuerda común; por consiguiente $AC \perp DE$ y $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CAE$ (triángulo ADE es isósceles).

Por otra parte, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = \frac{\smile AC}{2}$.

De las últimas igualdades se deduce:

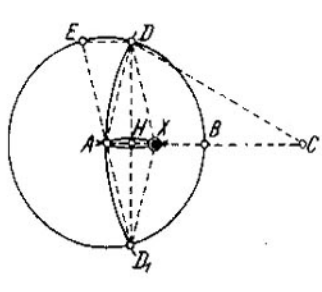
$$\sphericalangle CAE = \frac{\smile AC}{2}.$$

La recta AE es tangente a la circunferencia (B, A) en el punto A y, por consiguiente, $AE \perp AB$.

PROBLEMA 9. Trazar un segmento igual a $\frac{1}{n}$ del segmento dado AB (dividir el segmento AB en n partes iguales, $n = 2, 3...$).

Construcción (1^r^ procedimiento). Tracemos el segmento $AC = nAB$ (problema 2). Describamos la circunferencia (C, A), en la intersección con la circunferencia (A, B) obtenemos los puntos D y D_1. Las circunferencias (D, A) y (D_1, A) determinarán el punto buscado X. El segmento $AX = \frac{AB}{n}$ (dibujo 12).

Al aumentar el segmento AX 2, 3, etc., n veces (problema 2) construyamos los puntos que dividirán el segmento AB en n partes iguales.



DIBUJO 12.

Demostración. Puesto que los triángulos isósceles ACD y AXD son semejantes (ángulo A es común), se deduce que:

$$AC : AD = AD : AX$$

ó

$$AD^2 = AB^2 = AC \cdot AX = nAB \cdot AX.$$

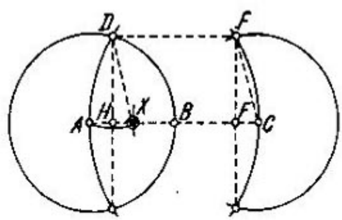
De aquí

$$AX = \frac{1}{n} AB.$$

El punto X se halla sobre la recta AB.

Observación. Siendo los valores de n grandes, la determinación del punto X carece de precisión: los arcos de las circunferencias (D, A) y (D_1, A) se intersecan en el punto X bajo un ángulo muy pequeño[1]. En este caso en vez de la circunferencia (D_1, A) para determinar el punto X se puede trazar la circunferencia (A, ED) en que E es el punto diametralmente opuesto al punto D_1 de la circunferencia (A, B).

Construcción (2° procedimiento). Tracemos el segmento $AC = nAB$ (problema 2). Describamos luego las circunferencias (A, C), (C, A) y (C, AB) que se intersecarán en los puntos D y E. Si ahora se trazan las circunferencias (D, A) y (C, DE), entonces en su intersección obtendremos el punto X. El segmento $AX = \frac{1}{n} AB$ (dibujo 13).



DIBUJO 13.

[1] La determinación del ángulo de intersección de dos curvas véase en el § 8 (pág. 72).

Demostración. El punto X se halla sobre la recta AC, ya que $AC \parallel DE$ y $XC \parallel DE$ (figura $CEDX$ es paralelógramo). Puesto que los triángulos isósceles ACD y AXD son semejantes, resulta que:

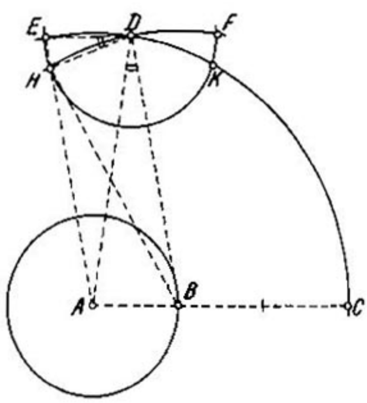
$$AX = \frac{1}{n} AB.$$

Aduzcamos también la construcción propuesta por el profesor A.S. Smogorzhevski[1]. Esta construcción se diferencia de las anteriores por el hecho de que la parte buscada $\frac{1}{n}$ del segmento AB no se encuentra sobre el segmento dado.

Construcción (3^r procedimiento). Tracemos el segmento $AC =$ $= nAB$ (problema 2). Describamos las circunferencias (A, C) y (B, AC) hasta su encuentro en el punto D.

La circunferencia (D, AB) cortará las dos últimas en los puntos E y H. El segmento $EH = \frac{1}{n} AB$ (dibujo 14).

Demostración. Siendo los tres triángulos ABD, ADE y BDH iguales en sus lados, resulta que: $\angle ADB = \angle EDH$. Los triángulos



DIBUJO 14.

[1] Véase [11] en la bibliografía recomendada (pág. 80).

isósceles ADB y EDH son semejantes, y por consiguiente,

$$EH : ED = AB : AD$$

ó

$$EH : AB = AB : nAB.$$

En definitiva

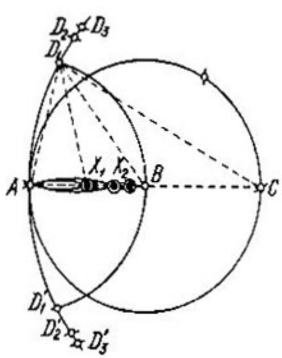
$$EH = \frac{1}{n} AB.$$

Notemos que

$$EK = \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{n} AB,$$

$$HK = \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) AB.$$

PROBLEMA 10. Trazar un segmento igual a $\frac{1}{2^n}$ del segmento AB dado (dividir el segmento AB en 2^n partes iguales $n = 1,2,3,..$)



DIBUJO 15.

Construcción (1^r procedimiento). Tracemos el segmento $AC = 2AB$ (problema 2). Describamos la circunferencia (C, A) y designamos mediante D_1 y D_1' sus puntos de intersección con la circunferencia (A, B). Si ahora se dibujan las circunferencias (D_1, A) y (D'_1, A), entonces en su intersección obtendremos el punto X_1. El segmento $BX_1 = AX_1 = \frac{1}{2}AB$. Luego describamos la circunferencia (A, BD_1) y en su intersección con (C, A) obtenemos los puntos D_2 y D'_2. Tracemos las circunferencias (D_2, A) y (D'_2, A) hasta su encuentro en el punto X_2. El segmento $BX_2 = \frac{1}{2^2}AB$.

Si luego se dibujan las circunferencias (A, BD_2), (D_3, A) y (D'_3, A) *obtendremos el punto* X_3. *El segmento* $BX_3 = \frac{1}{2^3}AB$ etc.

Demostración. Siendo los triángulos isósceles ACD_1 y AD_1X_1 semejantes, resulta que

$$AD_1 : AC = AX_1 : AD_1$$

ó

$$AB : 2AB = AX_1 : AB.$$

De aquí se obtiene

$$AX_1 = \frac{1}{2}AB.$$

Introduzcamos las designaciones $AB = a$, $BD_k = m_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

El segmento BD_1 es mediana del triángulo ACD_1 y, por consiguiente,

$$4BD_1^2 = 2AD_1^2 + 2CD_1^2 - AC^2$$

o, de otro modo,

$$4m_1^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - AC^2 = 2AB^2 + AC^2 = 2AB^2 + 4AB^2.$$

Es decir,

$$m_1^2 = BD_1^2 = \frac{1+2}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2.$$

Puesto que los triángulos isósceles ACD_2 y AD_2X_2 son semejantes, obtenemos

$$AD_2 : AC = AX_2 : AD_2$$

y, tomando en consideración que $AD_2 = BD_1 = m_1$ y $AC = 2a$, tendremos

$$AX_2 = \frac{3}{4}a \text{ ó } BX_2 = \frac{1}{4}a = \frac{1}{2^2}AB.$$

De modo análogo encontremos

$$m_2^2 = \frac{1 + 2 + 2^2}{2^2}a^2 \text{ y } BX_3 = \frac{1}{2^3}AB,$$

etc. En general,

$$m_k{}^2{}_{-1} = \frac{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1}}{2^{k-1}}a^2 \text{ y } BX_k = \frac{1}{2^k}AB.$$

Para dividir el segmento AB en 2^n partes iguales es necesario aumentar 2, 3, ..., 2^n veces el segmento BX_n (problema 2).

Construcción (2° procedimiento). Tracemos el segmento $AC = 2AB$ (problema 2) para lo que describamos la circunferencia (B, A) y tracemos en ésta las cuerdas $AE = EH = HC = a$. Describamos las circunferencias (A, C) y (C, E) hasta su intersección en los puntos D_1 y D'_1. El punto buscado X_1 encontramos como intersección de las circunferencias (D_1, C) y (D'_1, C). El segmento $BX_1 = \frac{1}{2}AB.$

Describamos la circunferencia (C, BD_1) que interseca (A, C) en los puntos D_2 y D'_2 *y luego las circunferencias* (D_2, BD_1) y (D'_2, BD_1); estas últimas, al cortarse, determinarán el punto buscado X_2. El segmento $BX_2 = \frac{1}{2^2}AB$ (dibujo 16).

De modo análogo, si se describen las circunferencias (C, BD_2), (D_3, BD_2) y (D'_3, BD_2) determinaremos el punto X_3. El segmento $BX_3 = \frac{1}{2^3}AB$, etc.

Demostración. Siendo semejantes los triángulos isósceles ACD_1 y CD_1X_1 obtenemos:

$$CX_1 : CD_1 = CD_1 : AC.$$

Tomando en consideración que $CD_1 = CE = \sqrt{3}\ AB$, encontramos que:

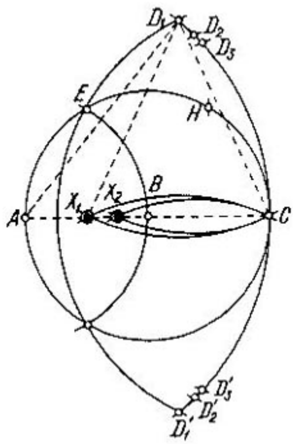
$$CX_1 = \frac{3}{2}AB \text{ y, por consiguiente, } BX_1 = \frac{1}{2}AB.$$

Introduzcamos la designación $BD_k = m_k$, donde $k = 1, 2, \ldots, n$. El segmento BD_1 es mediana del triángulo ACD_1 y, por lo tanto,

$$4BD_1^2 = 4m_1^2 = 2AD_1^2 + 2CD_1^2 - AC^2 = 2AC^2 + 2CE^2 - AC^2 = \\ = 4a^2 + 2\cdot 3a^2.$$

ó

$$m_1^2 = \left(1 + \frac{3}{2}\right)a^2.$$



DIBUJO 16.

En virtud de la semejanza de los triángulos ACD_2 y CD_2X_2 tenemos

$$CX_2 : CD_2 = CD_2 : AC.$$

Al notar que $CD_2 = BD_1 = m_1$ y $AC = 2AB = 2a$, obtenemos:

$$CX_2 = \frac{CD_2^2}{AC} = \frac{m_1^2}{2a} = \frac{5}{2^2}a.$$

Por consiguiente,

$$BX_2 = \frac{1}{2^2} AB.$$

De modo completamente análogo demostremos que

$$m_2^2 = BD_2^2 = \frac{9}{4} a^2, \quad CX_3 = \frac{9}{8} a \text{ y } BX_3 = \frac{1}{2^3} AB,$$

etc. En general,

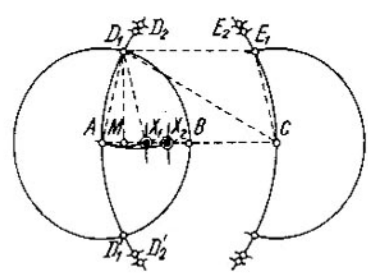
$$m_{k-1}^2 = BD_{k-1}^2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{3}{2^{k-1}}\right) a^2 \text{ y}$$

$$BX_k = \frac{1}{2^k} AB.$$

Si en la construcción según el primer procedimiento para grandes valores de k ($k \leq n$) la determinación del punto X_k no es precisa (arcos de las circunferencias que determinan este punto casi tocan uno a otro), entonces es posible resolver este problema mediante el procedimiento siguiente.

Construcción (3ᵉʳ procedimiento). Tracemos el segmento $AC = 2AB$ (problema 2). Describamos las circunferencias (A, C), (C, A) y (C, AB); en la intersección obtenemos los puntos D_1 y E_1 (dibujo 17). En la intersección de las circunferencias (D_1, A) y (C, D_1E_1) obtenemos el punto buscado X_1. El segmento $BX_1 = \frac{1}{2} AB$ (dibujo 17).

Tracemos luego $AD_2 = CE_2 = BD_1$ para lo que describamos las circunferencias (A, BD_1) y (C, BD_1). Describamos las circunferencias



DIBUJO 17.

(D_2, A) y (C, D_2E_2) hasta su encuentro en el punto X_2. El segmento $BX_2 = \frac{1}{2^2}AB$, etc.

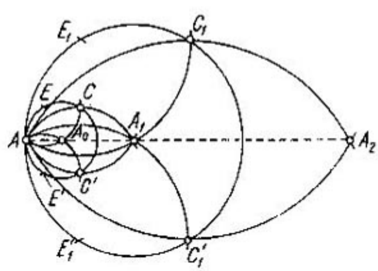
Demostración. El punto X_1 se halla sobre la recta AC, puesto que $AC \parallel D_1E_1$ (figura AD_1E_1C es trapecio) y $X_1C \parallel D_1E_1$ (figura $X_1D_1E_1C$ es paralelógramo), esto significa que $X_1C \parallel AC$. De modo análogo, se determina que los puntos X_2, X_3, ..., X_n se hallan sobre la recta AC.

De lo expuesto anteriormente se deduce que $D_1X_1 = D_1'X_1$, $D_2X_2 = D_2'X_2$, ... Entonces, como se ha demostrado en la construcción por el primer procedimiento del problema examinado,

$$BX_1 = \frac{1}{2}AB,\ BX_2 = \frac{1}{2^2}AB,\ BX_3 = \frac{1}{2^3}AB, ...$$

PROBLEMA 11. Trazar un segmento que sea 3^n veces mayor que el segmento dado AA_0 ($n = 1, 2, 3, ...$).

Construcción. Describamos las circunferencias (A_0, A) y, sin cambiar la abertura de compás, tracemos las cuerdas $AE = EC$, $AE' = E'C'$. Describamos las circunferencias (C, A) y (C', A) hasta su intersección en el punto A_1. El segmento $AA_1 = 3AA_0$ (dibujo 18).



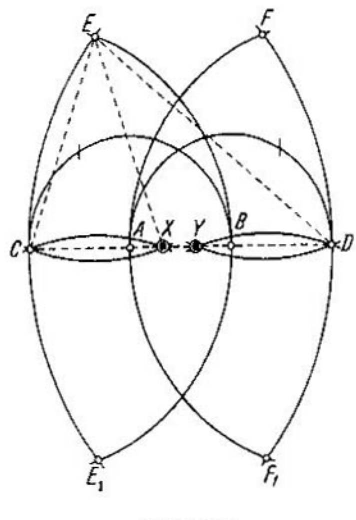
DIBUJO 18.

Describamos luego la circunferencia (A_1, A) y tracemos las cuerdas $AE_1 = E_1C_1$, $AE_1' = E_1'C_1'$. En la intersección de las circunferencias (C_1, A) y (C_1', A) obtenemos el punto A_2. El segmento $AA_2 = 3^2AA_0$, etc.

La validez de la construcción es evidente.

PROBLEMA 12. Dividir el segmento AB en tres partes iguales.
Examinemos un procedimiento elegante de construcción propuesto por L. Mascheroni.

Construcción. Tracemos $AC = AB = BD$ (problema 2). Describamos las circunferencias (C, B), (C, D), (D, A) y (D, C) en cuyas intersecciones obtenemos los puntos E, E_1, F y F_1. Las circunferencias (E, C) y (E_1, C), (F, D) y (F_1, D) determinarán los puntos buscados X y Y que dividen el segmento AB en tres partes iguales (dibujo 19).



DIBUJO 19.

Demostración. Los triángulos isósceles CEX y CDE son semejantes, por eso:

$$CX : CE = CE : DC.$$

Al tomar en consideración que $CE = 2AB$ y $CD = 3AB$ obtenemos $CX = \frac{4}{3}AB$, pues $AX = \frac{1}{3}AB$.

PROBLEMA 13. Hallar el centro de la circunferencia dibujada.

Construcción. Tomemos en la circunferencia dada un punto A y describamos una circunferencia (A, d) de un radio arbitrario d; en las intersecciones obtenemos los puntos B y D. En la circunferencia (A, d) marquemos el punto C que es diametralmente opuesto al punto B. Describamos luego las circunferencias (C, d) y (A, CD); designemos con E el punto de su intersección. Y, por fin, describamos la circunferencia (E, CD) hasta su encuentro con (A, d) en el punto M. El segmento BM es igual al radio de la circunferencia dada.

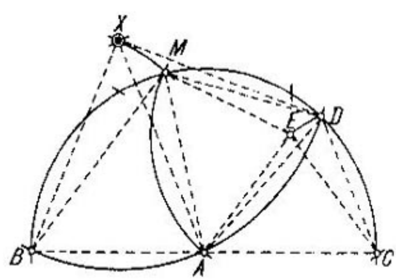
Las circunferencias (B, M) y (A, BM) determinan el centro buscado de la circunferencia descrita (dibujo 20).

Demostracion. Los triángulos isósceles ACE y AEM son iguales uno a otro y, por consiguiente, $\sphericalangle EAM = \sphericalangle ACE$.

Por un lado $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ACE + \sphericalangle AEC$ [$\sphericalangle BAE$ es el ángulo exterior del triángulo ACE] y por otro lado, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAM +$ $+ \sphericalangle EAM$.

De aquí

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle AEC.$$



DIBUJO 20.

De este modo, los triángulos isósceles ABM y ACE son semejantes y, de este modo,

$$BM : AB = AC : CE$$

ó

$$BX : AB = AC : CD.$$

De la última correlación se deduce que los triángulos isósceles

ABX y ACD son semejantes, entonces resulta que

$$\sphericalangle BAX = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \sphericalangle BAD = \sphericalangle DAX;$$

las últimas dos igualdades se deducen de que

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC + \sphericalangle ACD = 2 \sphericalangle ACD = 2 \sphericalangle BAX.$$

Basándose sobre la igualdad de los ángulos BAX y DAX llegamos a la conclusión de que los triángulos isósceles ABX y ADX son iguales entre si, es decir,

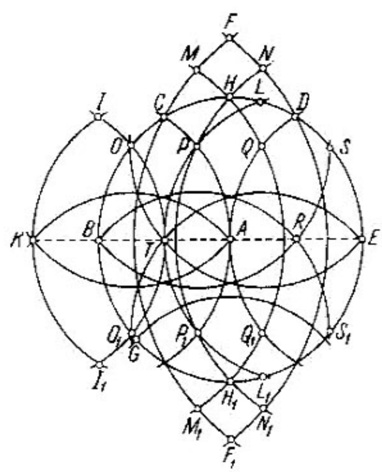
$$BX = AX = DX.$$

El punto X es el centro buscado de la circunferencia.

Observación. El segmento $d = AB$ debe tomarse mayor que la mitad de radio de la circunferencia dada; en caso contrario las circunferencias (C, D) y (A, CD) no se cortarán.

En conclusion de este párrafo aducimos sin demostración la solución del problema siguiente de Mascheroni [10].

PROBLEMA 14 Trazar el segmento $\frac{1}{2}\sqrt{n}AB$, donde $AB = 1$, $n = 1, \ldots, 25$.



DIBUJO 21.

Construcción. Describamos la circunferencia (A, B) y con el radio AB el que, para simplificar la anotación, se toma por un segmento unitario, tracemos las cuerdas $BC = CD = DE$. Describamos las circunferencias (B, D) y (E, C) hasta su encuentro en los puntos F y F_1. Describamos las circunferencias (B, AF) y (E, AF) que intersecarán (A, B) en los puntos H y H_1, y las circunferencias (B, D) y (E, C) en los puntos N y N_1; M y M_1. Describamos las circunferencias (E, A) y (B, A) y notemos los puntos P, P_1, Q y Q_1 de sus intersecciones con las circunferencias (B, AF) y (E, AF). Las circunferencias (P, B) y (P_1, B) se cortarán en el punto R, mientras que la circunferencia (A, B) la intersecarán en los puntos S y S_1. Del mismo modo las circunferencias (Q, E) y (Q_1, E) se cortarán en el punto T, mientras que la circunferencia (A, B) la intersecarán en los puntos O y O_1. Describamos las circunferencias (R, AB) y (F, AB) hasta su encuentro con la circunferencia (A, B) en los puntos L, L_1 y G. La intersección de las circunferencias (O, A) y (O_1, A) determinará el punto K. Y, por fin, describimos las circunferencias (K, AB) y (T, AB) en la intersección de las cuales obtenemos los puntos I e I_1. Entonces

$$AT = \frac{1}{2}\sqrt{1}, \quad QQ_1 = \frac{1}{2}\sqrt{7}, \quad HK = \frac{1}{2}\sqrt{13}, \quad KD = \frac{1}{2}\sqrt{19},$$

$$PT = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad AF = \frac{1}{2}\sqrt{8}, \quad BS = \frac{1}{2}\sqrt{14}, \quad FG = \frac{1}{2}\sqrt{20},$$

$$DR = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad BR = \frac{1}{2}\sqrt{9}, \quad LL_1 = \frac{1}{2}\sqrt{15}, \quad I_1D = \frac{1}{2}\sqrt{21},$$

$$AB = \frac{1}{2}\sqrt{4}, \quad BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}, \quad BE = \frac{1}{2}\sqrt{16}, \quad KS = \frac{1}{2}\sqrt{22},$$

$$HT = \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad PS_1 = \frac{1}{2}\sqrt{11}, \quad FK = \frac{1}{2}\sqrt{17}, \quad MM_1 = \frac{1}{2}\sqrt{23},$$

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}, \quad KN = \frac{1}{2}\sqrt{18}, \quad MN_1 = \frac{1}{2}\sqrt{24},$$

$$KE = \frac{1}{2}\sqrt{25} = \frac{1}{2}\sqrt{25}\,AB.$$

§ 3. INVERSIÓN Y SUS PROPIEDADES FUNDAMENTALES

Al final del siglo XIX A. Adler aplicó el principio de inversión a la teoría de construcciones geométricas hechas con un solo compás. Valiendose de este principio estableció en la geometría del compás el procedimiento general para resolver los problemas de construcción.

En este párrafo daremos definición de la inversión y expondremos en breve sus propiedades fundamentales que serán usadas en lo ulterior.

Supongamos que en el plano del dibujo se da cierta circunferencia (O, r) y el punto P distinto del punto O.

Tomemos sobre el rayo OP el punto P' de tal modo que el producto de los segmentos OP y OP' sea igual al cuadrado de radio de la circunferencia dada, es decir,

$$OP \cdot OP' = r^2. \tag{1}$$

El punto P' de esta índole se llama *de inversión* al punto P con respecto de la circunferencia (O, r). La circunferencia (O, r) se llama circunferencia de inversión o básica, su centro O se llama centro o polo de inversión y la magnitud r^2, potencia de la inversion.

Si el punto P' es de inversión respecto al punto P, es evidente que, al revés, el punto P es de inversión respecto al punto P'.

La correspondencia entre los puntos de inversión o, de otro modo, la transformación que a cada punto P de cierta figura le pone en correspondencia el punto de inversión P' se llama inversion o transformación de radios inversos[1]

De la definicion de la inversión se deduce que a cada punto P en un plano le corresponde el punto determinado y único P' del mismo plano, ademas si $OP > r$, $OP' < r$. La exclusión constituye el centro O de la circunferencia de inversión. Ningún

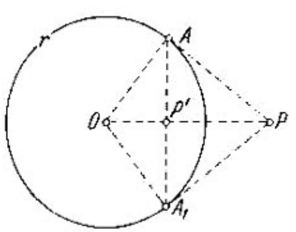
[1] Supongamos que $OA = r = 1$, $OP = R$, $OP' = R'$, la igualdad (1) se escribirá en este caso así, $R' = \frac{1}{R}$. Las distancias entre los puntos de inversión P y P' y el centro de inversión O son números mutuamente inversos. La inversion (del latin *inversio*) significa literalmente conversion, permutacion.

punto del plano puede ser de inversión respecto al punto O lo que se deduce directamente de la igualdad (1)[1].

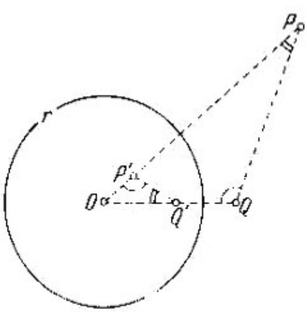
Sean AP y A_1P tangentes trazadas hacia la circunferencia de inversión (O, r) desde el punto P que se encuentra fuera de esta circunferencia (dibujo 22). Entonces el punto P' de intersección de las rectas AA_1 y OP será de inversión respecto al punto P. Realmente, en el triángulo rectángulo OAP (AP' es la altura)

$$OP \cdot OP' = OA^2 = r^2.$$

Supongamos que el punto P se mueve a lo largo de cierta curva l, entonces su punto de inversión P' también describirá cierta curva l'. Las curvas l y l' se llaman **m u t u a m e n t e i n v e r s a s**.



DIBUJO 22.



DIBUJO 23.

LEMA. *Si los puntos P' y Q' son de inversión a los puntos P y Q con respecto de la circunferencia (O, r), entonces*

$$\sphericalangle OP'Q' = \sphericalangle OQP, \quad \sphericalangle OQ'P' = \sphericalangle OPQ$$

Demostración. De la igualdad $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2$ o

[1] En la geometría superior, partiendo de ciertas ideas, al centro O le ponen en correspondencia "un punto inifinitamente alejado" del plano. Cuando el punto P' se aproxima al centro de inversión O el segmento OP' disminuye, entonces, para no alterar la igualdad (1) el segmento OP debe aumentar y el punto P se alejará cada vez más del centro de inversión O, es decir, si $OP' \to 0$, entonces $OP \to \infty$.

$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$ se deduce que los triángulos $OQ'P'$ y OQP son semejantes (dib. 23). Queda así demostrada la afirmación del lema.

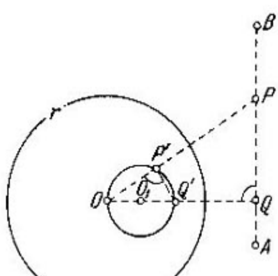
De la definición de la inversión se deducen inmediatamente dos teoremas.

TEOREMA I. *Si dos curvas se intersecan en el punto P, entonces las curvas inversas a éstas se intersecan en el punto P' que es de inversión al punto P.*

TEOREMA II. La recta que pasa a través del centro de inversión O es inversa a sí misma.

TEOREMA III. La curva inversa a la recta dada AB que no pasa a través del centro de inversión, es una circunferencia (O_1, OO_1) que pasa por el centro de inversión O, de modo que siempre $OO_1 \perp AB$.

Demostración. Sea Q la base de perpendicular bajada del centro de inversión O sobre la recta dada. Designemos con Q' el punto de inversión al punto Q. Tomemos en la recta dada un punto arbitrario P y designemos con P' el punto de inversión al primero (dibujo 24).



DIBUJO 24.

Basándose sobre el lema podemos escribir:

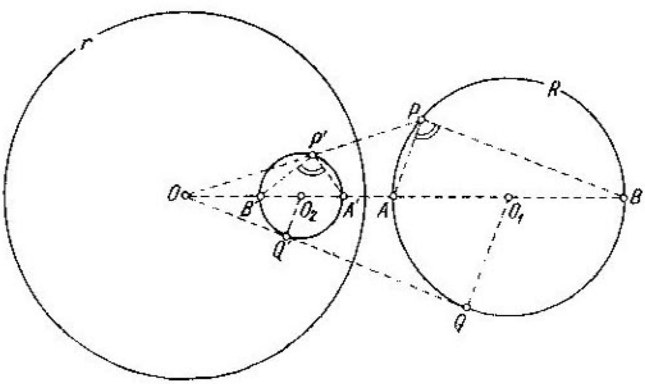
$$\measuredangle OP'Q' = \measuredangle OQP = 90^\circ.$$

Por lo tanto, cuando el punto P se desplaza a lo largo de la recta AB, el punto P' de inversión al primero describirá la circunferencia que tiene el segmento OQ' como su diámetro.

Puesto que la circunferencia (O_1, OO_1) y la recta dada AB son mutuamente inversas, tiene lugar también la afirmación inversa.

TEOREMA IV. *La curva inversa a la circunferencia dada* (O_1, R) *que no pasa a través del centro de inversión, es también una circunferencia. En este caso el centro de inversión es centro de semejanza de estas circunferencias.*

Demostración. Sea la línea de centros OO_1 de la circunferencia de inversión (O, r) y de la circunferencia dada (O_1, R) interseca la última de éstas en los puntos A y B. Designemos con A' y B' los puntos de inversión a los puntos A y B. Tomemos en la circunferencia (O_1, R) un punto arbitrario P y el punto de inversión a éste designemos con P' (dibujo 25).



DIBUJO 25.

Empleando el lema obtenemos:

$$\measuredangle OA'P' = \measuredangle OPA \text{ y } \measuredangle OB'P = \measuredangle OPB,$$

de aquí

$$\measuredangle OB'P' - \measuredangle OA'P' = \measuredangle OPB - \measuredangle OPA.$$

En los triángulos $A'B'P'$ y ABP

$$\measuredangle A'P'B' = \measuredangle OB'P' - \measuredangle OA'P' \text{ y } \measuredangle APB = \measuredangle OPB - \measuredangle OPA = 90^\circ.$$

Al tomar en consideración la igualdad anterior obtenemos:

$$\sphericalangle A'P'B' = \sphericalangle APB = 90^\circ.$$

Supongamos ahora el que punto P se mueve a lo largo de la circunferencia dada (O_1, R), entonces el punto P' de inversión a ésta describirá la circunferencia (O_2, P') que tiene como su diámetro el segmento A'B'. Así queda demostrado el teorema.

Si QQ' es la tangente exterior común de la circunferencia dada (O_1, R) y de la circunferencia (O_2, P') inversa a la primera, entonces los puntos de tangencia Q y Q' serán siempre mutuamente de inversión. La perpendicular levantada del punto Q hacia la tangente QQ' cortará la línea de centros OO_1 en el punto O_2 que es centro de la circunferencia inversa a la dada.

§ 4. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE INVERSIÓN EN LA GEOMETRÍA DEL COMPÁS

La aplicación del método de inversión a la solución de los problemas geométricos de construcción empleando un solo compás da la posibilidad de indicar el método general, los principios generales que se emplean para solucionar los problemas de construcción en la geometría del compás.

Las construcciones de Mohr – Mascheroni, aunque son en sumo grado elegantes, sin embargo, en la mayoría de los casos se realizan mediante vía hasta tal punto artificial que involuntariamente surge la cuestión, cómo fuera posible efectuar cada una de estas construcciones.

PROBLEMA 15. Trácese el punto X de inversión al punto dado C con respecto de la circunferencia de inversión (O, r).

Construcción, para $OC > \frac{r}{2}$ (dibujo 26). Describamos la circunferencia (C, O) hasta que se interseque en los puntos D y D_1 con la circunferencia de inversión. Si ahora se trazan las circunferencias (D, O) y (D_1, O), entonces en la intersección obtendremos el punto buscado X.

Demostración. Siendo los triángulos isósceles CDO y DOX

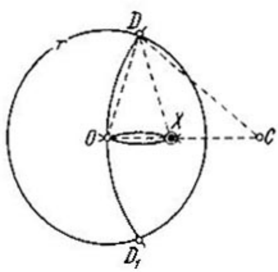
semejantes encontramos:

$$OC : OD = OD : OX$$

ó

$$OC \cdot OX = OD^2 = r^2.$$

Observación. No es difícil ver que la construcción expuesta coincide con la solución del problema 9 (1' procedimiento), si no se construye el segmento $AC = nAB$, sino que se considera el



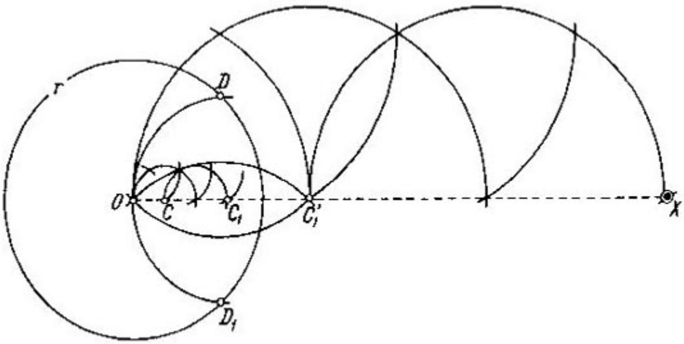
DIBUJO 26.

punto C como determinado. De este modo el segundo procedimiento de solución del problema 9 sirve también para encontrar el punto X que es de inversión al punto dado C; además el punto C está prefijado y no se debe trazar el segmento $AC = nAB$.

Construcción, si $OC \leqslant \frac{r}{2}$ (dibujo 27). La circunferencia (C, O) no intersecará la circunferencia de inversión; por eso tracemos al principio el segmento $OC_1 = nOC$, además el número natural n se tomará tal que $OC_1 > \frac{r}{2}$ (problema 2). Encontremos el punto C_1' que es de inversión al punto C_1 (1' procedimiento de construcción del problema examinado). Tracemos el segmento $OX = nOC_1'$. El punto X es de inversión al punto dado C.

Demostración. Sustituyendo $OC_1 = nOC$ y $OC_1' = \frac{OX}{n}$ en la igualdad $OC_1 \cdot OC_1' = r^2$, obtenemos:

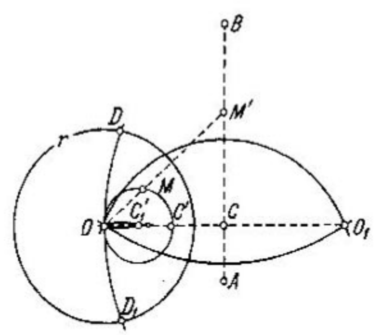
$$OC_1 \cdot OC_1' = nOC \cdot \frac{OX}{n} = OC \cdot OX = r^2.$$



DIBUJO 27.

PROBLEMA 16. Sean dadas la circunferencia de inversión (O, r) y la recta AB que no pasa a través del centro de inversión. Describir la circunferencia inversa a la recta dada.

Construcción. Tomemos O_1 que es simétrico al centro de inversión O respecto a la recta AB (problema 1). Encontremos el punto O_1' que es de inversión al punto O_1 (problema 15). La circunferencia (O_1', O) es inversa a la recta dada AB (dibujo 28).



DIBUJO 28.

Demostración. Sean C y C' los puntos de intersección de la recta OO_1 con la recta dada AB y la circunferencia (O_1', O).

De la construcción expuesta se deduce:

$$OO_1 \cdot OO'_1 = r^2,\ OO_1 = 2OC,\ OC' = 2OO'_1,\ OC \perp AB.$$

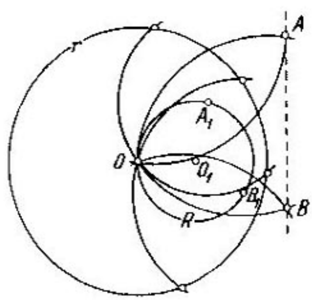
De aquí

$$OO_1 \cdot OO'_1 = 2OC \cdot \frac{OC'}{2} = OC \cdot OC' = r^2.$$

En virtud del teormea III la circunferencia (O'_1, O) es inversa a la recta AB.

PROBLEMA 17. Trazar la recta AB inversa a la circunferencia dada (O_1, R) que pasa por el centro de inversión O.

Construcción. Si la circunferencia dada interseca la circunferencia de inversión en los puntos A y B, entonces la recta AB es inversa a esta circunferencia. En caso contrario tomemos en la circunferencia dada los puntos A_1 y B_1 (dibujo 29) y hallemos

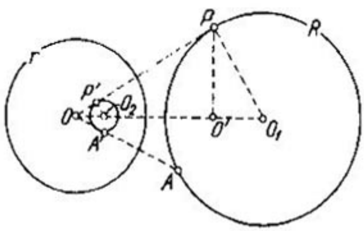


DIBUJO 29.

los puntos A y B de inversión a los primeros (problema 15). La recta AB es inversa a la circunferencia dada (O_1, R). Al cambiar la posición de los puntos A_1 y B_1 en la circunferencia dada es posible construir cualesquiera que sean puntos de esta recta. El carácter correcto de la construcción es evidente (véase el teorema III).

PROBLEMA 18. Se da la circunferencia (O_1, R) que no pasa por el centro de inversión O. Trazar la circunferencia inversa a la dada.

Construcción. Tomemos la circunferencia dada (O_1, R) por la de inversión y marquemos el punto O' que sea de inversión al punto O (problema 15). Luego determinemos el punto O_2 que sea de inversión al O' con respecto de la circunferencia de inversión (O, r). El punto O_2 es centro de la circunferencia buscada (dibujo 30).



DIBUJO 30.

Tomemos en la circunferencia dada (O_1, R) un punto arbitrario A y determinemos el punto A' que es de inversión al primero. La circunferencia (O_2, A') es inversa a la circunferencia dada (O_1, R).

Demostración. Sea PP' la tangente exterior común de las circunferencias (O_1, R) y (O_2, A') y $PO' \perp OO_1$.

En virtud de la semejanza entre los triángulos rectángulos OPO' y $OP'O_2$ podemos escribir:

$$OO_2 : OP' = OP : OO'$$

de otro modo,

$$OO_2 \cdot OO' = OP \cdot OP' = r^2,$$

puesto que los puntos P y P' son mutuamente de inversión. De la última igualdad se deduce que los puntos O_2 y O' son de inversión respecto a la circunferencia de inversión (O, r).

En el triángulo rectángulo OO_1P el segmento $O'P$ es altura y, por lo tanto,

$$O_1O \cdot O_1O' = (\overline{O_1P})^2 = R^2.$$

De este modo el punto O' es de inversión al punto O con respecto de la circunferencia (O_1, R), si la última se toma por la circunferencia de inversión.

El punto O está dado. Durante la construcción hemos encontrado al principio el punto O' y luego el punto O_2 que es el centro de la circunferencia buscada.

En los problemas 15, 16, 17 y 18 hemos demostrado cómo se puede, utilizando sólo un compás, trazar figuras que sean inversas a punto, recta y circunferencia. Ahora podemos examinar el método general aplicado para solucionar los problemas geométricos de construcción con ayuda de un solo compás.

Cada construcción realizada con el compás y la regla da en el plano del dibujo la figura Φ compuesta de puntos, rectas y circunferencias aisladas. La figura Φ' es inversa a la Φ respecto a la circunferencia (O, r) que está tomada por la circunferencia de inversión con el centro O que no se halla sobre alguna de rectas o circunferencias de la figura Φ, y se formará *sólo por puntos y circunferencias*. Al usar también los problemas 15, 16, 17 y 18 vemos que cada uno de estos puntos y rectas puede obtenerse con ayuda de un solo compás.

Supongamos ahora que cierto problema de construcción resoluble por medio del compás y la regla, es necesario solucionar valiéndose sólo de un compás.

Imaginemos que este problema se ha resuelto con ayuda del compás y la regla a consecuencia de lo cual se ha obtenido cierta figura Φ compuesta de puntos, rectas y circunferencias. La construcción de esta figura se realizará mediante el trazado en un orden determinado de un número finito de rectas y circunferencias.

Tomemos, dentro de lo posible, la circunferencia más apropiada de inversión (O, r) y tracemos la figura Φ' que sea inversa a la figura Φ (problemas de 15 a 18). La figura Φ' será compuesta sólo de puntos y circunferencias, si, claro está, la circunferencia de inversión fuera elegida de tal modo que su centro no se halla sobre alguna de rectas o circunferencias de la figura Φ.

Si ahora se construye una representación inversa a aquella imagen que se toma por resultado en la figura Φ', entonces llegaremos al resultado buscado. Además es necesario notar que es preciso hacer la construcción de la figura Φ' siguiendo aquel orden que se acepta para efectuar la construcción de la figura Φ empleando el compás y la regla.

Al aplicar el procedimiento expuesto anteriormente se puede solucionar, sirviéndose de un solo compás cada problema de construcción resoluble por medio del compás y la regla. El resultado fundamental de Mohr y Mascheroni está demostrado una vez más con ayuda del método de inversión.

Mediante el método general pueden resolverse también cinco problemas más simples que se exponen al final del § 1.

A fin de ilustrar el método general empleado para solucionar los problemas de construcción, utilizando un solo compás, aduzcamos la resolución del problema 7. Hallemos el punto de intersección de las dos rectas dadas AB y CD cada una de las cuales está dada mediante dos puntos.

Tomemos en el plano una circunferencia arbitraria (O, r) con el centro en O que no yace sobre las rectas dadas y lo aceptemos por la circunferencia de inversión. Tracemos las circunferencias inversas a las rectas dadas y notemos con X' el punto de su intersección (problema 16). Construyamos el punto X que es de inversión al punto X' (problema 15). X es el punto buscado de intersección de las rectas dadas AB y CD.

Aquí la figura Φ está formada por dos rectas dadas AB y CD (más precisamente, consta de cuatro puntos dados A, B, C y D por los cuales trazamos mentalmente las rectas dadas); la figura Φ' consta de dos circunferencias que son inversas a las rectas dadas AB y CD. Como la imagen que acepta en la figura Φ' como resultado, será el punto X'. El punto X que es de inversión al punto X', es el resultado buscado, o sea, el punto de intrsección de las rectas dadas.

Precisamente del mismo modo se puede solucionar el problema 6 (cuarto problema más simple). Hállese los puntos de intersección de la recta dada y la circunferencia dada. Si en este caso la recta no pasa por el centro de la circunferencia, entonces como la circunferencia de inversión hay que tomar la circunferencia dada. Esto simplificará considerablemente la solución del problema.

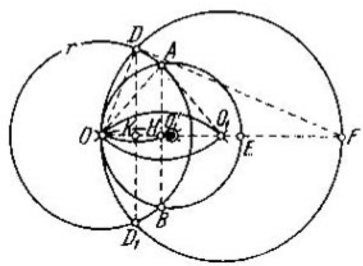
La validez de estas construcciones se deduce inmediatamente del teorema 1.

PROBLEMA 19 Encontrar el centro de la circunferencia dibujada.

Construcción. Tomemos en la circunferencia dada el punto O y con un radio arbitrario r describamos la circunferencia (O, r) que intersecará la circunferencia dada en los puntos A y B. Aceptemos la circunferencia (O, r) por la de inversión y marquemos el centro de la circunferencia que sea inversa a la recta AB (problema 16). Para cumplir la última construcción tracemos las circunferencias (A, O) y (B, O) hasta que se encuentren en el punto O_1; describamos la circunferencia (O_1, O) y notemos los puntos D y D_1 de su intersección con la circunferencia de inversión. Las circunferencias (D, O) y (D_1, O) determinarán el centro buscado de la circunferencia dibujada (figura 31).

Demostración. Los puntos A y B son de inversión a sí mismos puesto que se hallan sobre la circunferencia de inversión. De este modo, la circunferencia dibujada dada y la recta AB son figuras mutuamente inversas.

En el problema 16 se ha demostrado que el punto O'_1 es el centro buscado de la circunferencia dada que en este caso es inversa a la recta AB.



DIBUJO 31.

Es preciso atraer la atención del lector a la simpleza y la elegancia que tiene la solución del último problema. Para encontrar el centro de la circunferencia se han descrito seis circunferencias[1] Esta construcción es más simple y más precisa que la corriente realizada con ayuda del compás y la regla.

El problema dado, así como algunos otros problemas en la geometría del compás, como, por ejemplo, los problemas 3 y 8 (2° procedimiento de solución) es posible proponerlos como ejercicios en las clases de geometría a los alumnos de grados superiores. Partiendo de esto aduzcamos la demostración de construcción del problema 19 sin recurrir al principio de inversión.

Demostración. La recta OO_1 es perpendicular a la cuerda AB

[1] Sin duda, a la condición de que el radio r se toma mayor que la mitad del radio de la circunferencia dada. En caso contrario el número de las circunferencias será mayor (véase solución del problema 15, segundo caso).

de la circunferencia dada y pasa por su centro, esto significa que el centro buscado debe yacer sobre la recta OO_1. Sean E y F los puntos de intersección de la recta OO_1 con la circunferencia dada y la (O_1, O). El segmento OE es el diámetro de la circunferencia dada.

Examinando los triángulos rectángulos OAE y ODF para los que los segmentos AH y DK son alturas, encontramos:

$$OA^2 = OE \cdot OH \text{ y } OD^2 = OF \cdot OK.$$

Tomando en consideración que $OD = OA = r$, $OF = 2OO_1$, $OH = \frac{1}{2} OO_1$ y $OK = \frac{1}{2} OO_1'$, obtenemos:

$$OE \cdot OH = OF \cdot OK$$

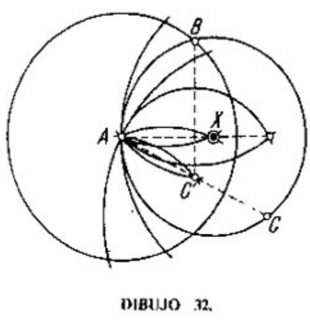
o

$$OE \cdot \frac{OO_1}{2} = 2 \cdot OO_1 \cdot \frac{OO_1'}{2}.$$

De aquí

$$OO_1' = \frac{OE}{2}.$$

PROBLEMA 20. Describir una circunferencia alrededor del triángulo dado ABC.



DIBUJO 32.

Construcción. Describamos la circunferencia (A, B) y la aceptemos por la circunferencia de inversión. Construyamos el punto C'

que sea de inversión al punto C (problema 15). Describamos la circunferencia (X, A) inversa la recta BC'' (problema 16). (X, A) es la circunferencia buscada descrita alrededor del triángulo ABC.

Demostración. El punto B es inverso a sí mismo, puesto que se halla sobre la circunferencia de inversión (A, B); el punto C' es inverso al punto C según la construcción. Por lo tanto, la circunferencia que pasa a través de los puntos dados A, B, y C, es inversa a la recta BC'. Pero, como se ha demostrado en el problema 16, el punto X es centro de la circunferencia buscada[1].

Observación. Aduzcamos ahora el procedimiento siguiente usado para resolver el problema 18. Tomemos en la circunferencia dada (O_1, R) los puntos arbitrarios A, B y C y obtengamos los puntos A', B' y C' de inversión a los primeros. La circunferencia descrita alrededor del triángulo $A'B'C'$ es la buscada e inversa a la circunferencia dada.

---

[1] En el problema 16 hemos hallado el centro de la circunferencia inversa a la recta dada. Precisamente esta construcción se ha usado para solucionar los problemas 19 y 20.

CAPÍTULO 2

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS MEDIANTE UN COMPÁS CON LIMITACIONES

En el primer capítulo de nuestro libro hemos examinado las construcciones realizadas con un solo compás las que se puede llamar ahora la geometría clásica del compás.

En la teoría de las construcciones geométricas en las que se emplea un solo compás siempre se sobreentiende el uso libre del compás, cuando no se ponen algunas limitaciones sobre las aberturas de las varillas (brazos). Con un compás de esta índole se puede dibujar las circunferencias de cualesquiera que sean radios grandes o pequeños.

Sin embargo, se conoce que en la realidad con ayuda de un compás dado concretamente se puede describir las circunferencias cuyos radios no son mayores de un cierto segmento $R_{máx}$ y no menores que un segmento R_{min}. El segmento $R_{máx}$ es igual a la abertura máxima de brazos del compás dado y R_{min}, a la abertura mínima. Si se designa con r el radio de la circunferencia que se puede describir con ayuda de este compás, entonces siempre tiene lugar la desigualdad

$$R_{min} \leqslant r \leqslant R_{máx}.$$

Acordemos de decir que en el caso dado las aberturas de varillas del compás están limitadas por abajo con el segmento R_{min} y por arriba con el segmento $R_{máx}$.

En el segundo capítulo examinaremos las construcciones geométricas realizadas con un solo compás, cuando en las aberturas de varillas están puestas ciertas limitaciones.

§ 5. CONSTRUCCIONES MEDIANTE UN COMPÁS CON ABERTURA DE BRAZOS LIMITADA POR ARRIBA

En el párrafo dado utilizaremos un compás cuyas aberturas de varillas están limitadas s o l a m e n t e p o r a r r i b a con un cierto segmento $R_{\text{máx}}$ dado de antemano. Al usar este compás se puede describir las circunferencias cuyos radios no sobrepasen este segmento. Para abreviar las anotaciones escribiremos en ulterior en vez de $R_{\text{máx}}$, simplemente R. Si se designa con r el radio de la circunferencia que se puede describir con ayuda del compás dado, entonces siempre

$$O < r \leqslant R.$$

PROBLEMA 21 Trazar el segmento igual a $\frac{1}{2^n}$ del segmento dado AB (dividir el segmento dado AB en 2, 4, 8, ..., 2^n partes iguales).

No es difícil comprobar que cuando $AB \leqslant \frac{R}{2}$ [1], se puede aprovecharse de la construcción expuesta en el problema 10; en

[1] Para comparar los dos segmentos dados AB y CD es conveniente describir la circunferencia (A, CD); si el punto B se halla: a) en el interior de esta circunferencia, $AB < CD$, b) en la circunferencia, $AB = CD$, c) fuera de la circunferencia, $AB > CD$.

Para comprobar la desigualdad $AB \leqslant \frac{1}{2}R$ o la desigualdad $2AB \leqslant R$ hay que describir la circunferencia (A, R), si el punto B se halla sobre la circunferencia (A, R) o fuera de esta, $R < 2AB$; si el punto B se encuentra en el interior de esta circunferencia, $AB < R$ y, por consiguiente, el segmento $2AB$ puede construirse (problema 2) y compararse, mediante el procedimiento indicado anteriormente, con el segmento R.

esta construcción el radio de la circunferencia mayor $AC = 2AB < R$[1].

Construcción para $AB < 2R$[2].

Con un radio arbitrario r describamos las circunferencias (A, r) y (B, r) y designemos por C y D los puntos de su intersección. Variando la magnitud del radio r siempre es posible lograr que el segmento $CD \leqslant \frac{R}{2}$. Dividamos ahora por la mitad el segmento CD (problema 10) y obtenemos el punto X_1. Es evidente que el punto X_1 divide por la mitad también el segmento dado AB.

Del mismo modo hallamos el punto X_2 que divide por la mitad el segmento AX_1. El segmento $AX_2 = \frac{1}{4}AB \leqslant \frac{R}{2}$. La construcción de los puntos $X_3, X_4, \ldots, X_n$ se reduce luego a la solución del problema 10.

Al aumentar $AX_n = \frac{AB}{2^n}$ 2^n veces (problema 2) dividamos el segmento AB en 2^n partes iguales.

Para el caso $AB \geqslant 2R$ la construcción se dará en el problema 24.

PROBLEMA 22 (primera operación fundamental). En una recta

[1] Al aplicar el primer procedimiento de construcción del problema 10 se debe comprobar que $AD_n \leqslant R$ para todos los $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{AD}_n^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)a^2 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right)a^2 = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2 = 2AB^2,$$

es decir, $AD_n < \sqrt{2}\,AB < R$

[2] Si las circunferencias (A, R) y (B, R) no se intersecan, $AB > 2R$

cuyos dos puntos A y B están prefijados constrúyese uno o varios puntos[1].

Construcción en el caso de que $AB < 2R$ se reduce al problema 5.

Construcción, cuando $AB \geqslant 2R$. Describamos las circunferencias (B, R) y (A, r), donde r es un segmento arbitrario que es menor o igual a R. Tomemos en la circunferencia (A, r) el punto C de tal modo que éste se halle "aproximadamente" sobre el segmento AB (es decir, que el ángulo CAB sea lo mínimo posible) y tracemos el segmento $AD = mAC$ (problema 2, $AC = r \leqslant R$). El número natural m se elige de tal modo que el punto D se caiga en el circulo (B, R)[2]. Cambiando la posición del punto C sobre el arco (A, r) y, si es necesario, al variar la magnitud del radio r, siempre es posible lograr que el punto D se encuentre en el círculo (B, R). De este modo construiremos los segmentos $AC = \ldots = HD = \dfrac{AD}{m}$ (dibujo 33).

Tomemos un número natural n tal que $2^{n-1} < m \leqslant 2^n$. Tracemos el segmento $DK = \dfrac{1}{2^n}BD$ (problema 21, aquí $BD < 2R$). Dividamos el segmento DH en 2^n partes iguales (problema 21 $DH = r \leqslant R$) y tomemos el segmento $DE = \dfrac{m}{2^n}DH$ (en el dibujo 33: $m = 3$, $2^{2-1} < 3 < 2^2$, $n = 2$, $DE = \dfrac{3}{4}DH$).

Tracemos el paralelogramo $HEKM$ para lo que es necesario describir las circunferencias (H, EK) y (K, EH). (Si en la intersección de estas circunferencias el punto M no se define con precisión, entonces para obtener el punto M hay que describir la circunferencia (E, K) y trazar en ésta las cuerdas $KP = PT$ que son iguales al radio EK. En la intersección de las circunferencias (H, EK) y (P, TH) obtenemos el punto M).

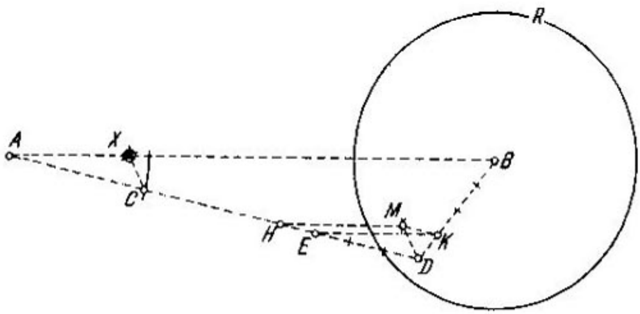
---

[1] Como ya hemos indicado anteriormente, al usar un solo compás, aún más un compás con abertura limitada de sus brazos, no podemos trazar una recta continua, sin embargo podemos construir cualquier cantidad de puntos que pertenecen a esta recta.

[2] El punto D puede no yacer en el circulo (B, R), lo importante es que $BD < 2R$. El punto tiene que hallarse en el circulo $(B, 2R)$, pero esta circunferencia no podremos describir con ayuda del compás dado.

Y, por fin, si se describen las circunferencias (A, HM) y (C, DM), entonces ambas estas circunferencias se intersecarán en el punto buscado X que se halla sobre la recta AB.

La construcción ulterior de los puntos que pertenecen a la recta dada AB, se reduce al problema $5(AX \leqslant R)$.



DIBUJO 33.

Demostración. Según la construcción podemos escribir:

$$\frac{BD}{DK} = 2^n \quad \text{y} \quad \frac{AD}{DE} = \frac{mAC}{\frac{m}{2^n}AC} = 2^n.$$

De este modo los triángulos ADB y DEK son semejantes (ángulo ADB es común). Esto significa

$$\sphericalangle DEK = \sphericalangle DAB \text{ y } EK \parallel AB.$$

Puesto que $HM \parallel EK$ (figura de $HEKM$ es paralelogramo), entonces

$$HM \parallel AB.$$

De la igualdad existente entre los triángulos ACX y DHM se deduce que $AX \parallel HM$, es decir, el punto X se halla sobre la recta AB.

Los radios de todas las circunferencias descritas en curso de la construcción dada no sobrepasan el segmento R.

Observación. Si resulta que $m = 2^n$, es decir, m toma uno de los valores de 2, 4, 8, 16, ..., la construcción del problema se simplifica considerablemente; el punto E en este caso coincide con el punto H y el punto M con el punto K. En este caso no será necesario realizar la división del segmento DH en 2^n partes iguales y el trazado del paralelogramo $EKMH$.

De este modo, cambiando la magnitud del radio r siempre hay que tratar de conseguir que el número m acepte uno de los valores de 2, 4, 8, 16,...

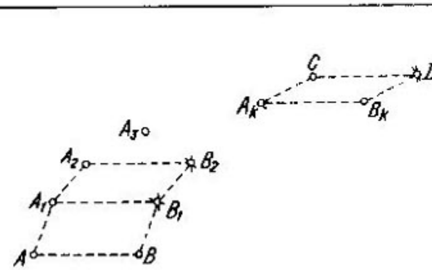
PROBLEMA 23. Del punto dado C trazar hacia la derecha (o hacia la izquierda) un segmento igual y paralelo al segmento dado AB.

Si el punto C no se encuentra sobre la recta AB, el problema se reduce a la construcción del paralelogramo $ABCD$ (o $ABCD'$).

Construcción, cuando $AB \leqslant R$. Supongamos que $AC \leqslant R$ y el punto C no se encuentra sobre la recta AB. Describamos las circunferencias (C, AB) y (B, AC) y marquemos el punto D de su intersección. El sermento CD es buscado, la figura $ABDC$ es paralelogramo.

Si es necesario trazar el segmento a partir del punto C en dirección opuesta, entonces en vez de la circunferencia (B, AC) hay que describir la circunferencia (A, BC). Si $BC > R$, para nosotros será imposible describir la circunferencia (A, BC) con el compás dado, sin embargo podremos obtener el punto buscado, si en la circunferencia (C, AB) se obtiene el punto D' que es diametralmente opuesto al punto D. La figura $ABCD'$ es el paralelogramo buscado.

Sea ahora $AC > R$ y $BC > R$ (dibujo 34). En la dirección del punto A al punto C tomemos una serie arbitraria de puntos A_1, A_2, ..., A_k a la condición de que $AA_1 \leqslant R$, $A_1A_2 \leqslant R$, ...,



DIBUJO 34.

$A_kC \leqslant R$. Tracemos los paralelogramos ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2$, ..., $A_{k-1}B_{k-1}B_kA_k$. Tracemos luego el paralelogramo A_kB_kDC (o A_kB_kCD'). El segmento CD es buscado. Esta construcción es válida también, cuando el punto C se halla sobre la recta AB.

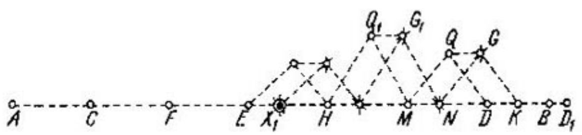
Si resulta que el punto A_i se encuentra por casualidad sobre la recta $A_{i-1}B_{i-1}$, entonces en vez del punto A_i es conveniente tomar otro punto.

Construcción, cuando $AB > R$. Al usar la solución del problema 22, determinemos sobre el segmento AB los puntos X_1, X_2, ..., X_n a la condición de que: $AX_1 \leqslant R$, $X_1X_2 \leqslant R$, ..., $X_nB \leqslant R$.

Luego tracemos los paralelogramos AX_1D_1C, $X_1X_2D_2D_1$, ..., $X_{n-1} \cdot X_nD_nD_{n-1}$, X_nBDD_n. El segmento CD es buscado.

PROBLEMA 24. Trazar el segmento igual a $\frac{1}{2^n}$ del segmento dado AB para $AB \geqslant 2R$ (dividir el segmento en 2^n partes iguales).

Construcción. En el segmento dado AB encontremos el punto C a la condición de que $AC \leqslant R$ (problema 22). Tracemos el segmento $AD = mAC$ (problema 2), además el número natural m tomemos tal que $AD \leqslant AB$ y $DB < R$, para lo que el segmento AC repetimos dos, tres, etc. veces hasta que no lleguemos al punto B. Si el numero m resulta impar, tracemos adicionalmente el segmento $DD_1 = AC$, entonces $AD_1 = (m+1)AC$, $AB < AD_1$ y $BD_1 < R$ (en el dibujo 35, $m = 6$).



DIBUJO 35.

Dividamos el segmento BD (o BD_1) mediante el punto K por la mitad (problema 21, $BD < R$).

Designemos con E el centro del segmento AD (o AD_1) y tracemos el segmento EX_1 que es igual y paralelo al segmento DK (problema 23) para que $AX_1 = AE + EX_1$ (o $AX_1 = AE - EX_1$), si el punto E es el medio del segmento AD_1); para esto tomemos los puntos Q, M, Q_1, H, ... y tracemos los paralelogramos $QDKG$, $MQGN$, Q_1MNG_1, etc.[1].

El punto X_1 divide el segmento dado AB por la mitad.

Luego dividamos por la mitad el segmento AX_1 y obtengamos la cuarta parte del segmento AB, etc. Si $AX_1 < 2R$, entonces empleemos la construcción indicada en el problema 21; en caso contrario realicemos la construcción de manera análoga a lo expuesto anteriormente.

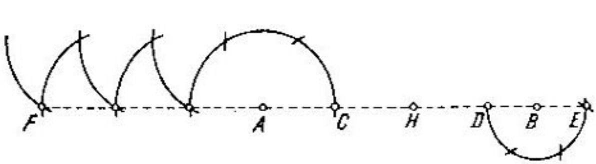
PROBLEMA 25. Trazar el segmento que sea n veces mayor que el segmento dado AB, cuando $AB > R$.

Construcción. Definamos en la recta dada AB el punto C de tal modo que $AC < R$ (problema 22). Tracemos el segmento $AD = mAC$ (problema 2, $AC < R$), al mismo tiempo elijamos el número m tratando que $AD \leqslant AB$ y $DB < R$; para esto es preciso el segmento AC repetir dos, tres, etc. veces hasta que alcancemos el punto B.

Tracemos a la derecha del punto D el segmento $DE = nDB$ (problema 2, $DB < R$). Y, por fin, construyamos a la izquierda del punto C el segmento $AF = (n-1)m\ AC$ (en este caso el segmento $CF = [(n-1)m + 1]CA$). El segmento $FE = nAB$ es buscado. (En el dibujo 36: $m = 3$, $n = 2$.)

Demostración. El segmento

$$FE = FA + AD + DE = (n-1)mAC + mAC + nDB = nmAC + \\ + nDB = n(mAC + DB) = n(AD + DB) = nAB.$$



DIBUJO 36.

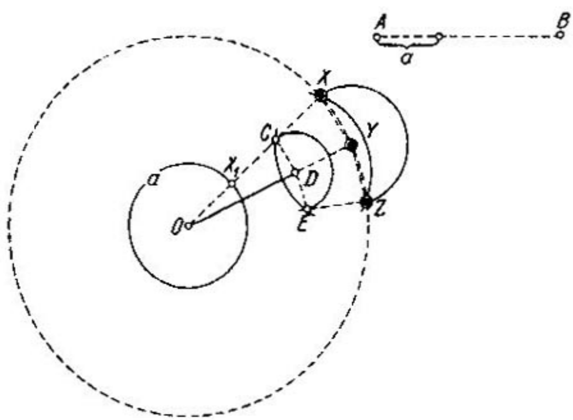
Observación. Para que el segmento construido coincida en su extremo izquierdo con el punto A, es necesario trazar previamente

[1] El punto X_1 será hallado, si se traza $AX_1 = AE + EX_1$ (véase la observación para el problema 6).

a la derecha del punto E el segmento EK que sea igual y paralelo al segmento $HD(AC = HD)$ (problema 23) y luego, en vez del segmento AF, construir $EM = (n-1)mEK$. Entonces $AM = nAB$.

PROBLEMA 26 (segunda operación fundamental). Del punto dado O, como centro, describir la circunferencia del radio dado AB.

Construcción. Si $AB \leqslant R$, valiéndose del compás dado con abertura limitada, la circunferencia se describe inmediatamente. Pero, si $AB > R$, entonces con el compás dado, no podemos dibujar la circunferencia en forma de una curva continua, sin embargo en este caso es posible obtener cualquier numero de puntos situados de modo cualquier que sea denso en la circunferencia dada que tiene prefijados el centro y el radio (dibujo 37).



DIBUJO 37.

Tracemos el segmento $a = \frac{AB}{2^n}$ (problemas 21 y 24), eligiendo el número n tal que $a \leqslant R$. Describamos la circunferencia (O, a), tomemos en ésta un punto arbitrario X_1 y construyamos el segmento $OX = 2^nOX_1$ (problema 2, $OX_1 = a \leqslant R$). El punto X pertenece a la circunferencia dada (O, AB).

Al cambiar la posición del punto X_1 en la circunferencia (O, a) se puede obtener cualesquiera que sean puntos de la circunferencia dada.

Si en la circunferencia dada ya están determinados dos puntos X e Y, siendo que $XY < R$, $DX \leqslant R$, los puntos ulteriores de circunferencia se hallan del modo siguiente. Describamos las circunferencias (Y, X) y (D, X) hasta su encuentro en el punto Z. El punto Z se halla sobre la circunferencia dada. Describamos las circunferencias (D, C) y (Y, C), en la intersección obtenemos el punto E. Si luego se trazan las circunferencias (Z, Y) y (E, Y), entonces construiremos un punto más de la circunferencia, etc.

Demostración. El segmento $OX = 2^n \cdot a = 2^n \cdot \frac{AB}{2^n} = AB$.

PROBLEMA 27 (tercera operación fundamental). Encontrar los puntos en que se cruzan las dos circunferencias dadas (O, AB) y (O_1, CD).

Construcción. Si los radios de ambas circunferencias no son mayores que R, la obtención de sus puntos de intersección se realiza directamente con ayuda del compás.

Supongamos ahora que el radio de una circunferencia dada (o de ambas) es mayor que R.

Tracemos los segmentos $a = \frac{AB}{2^n}$, $b = \frac{CD}{2^n}$ y $OE = \frac{OO_1}{2^n}$

(problemas 21 y 24); tomemos el número n tal que $a \leqslant R$ y $b \leqslant R$ (dibujo 38).

Describamos las circunferencias (O, a) y (E, b) y notemos los puntos X_1 e Y_1 en que éstas se cruzan.

Si ahora se trazan los segmentos $OX = 2^n OX_1$ y $OY = 2^n OY_1$, obtendremos los puntos buscados X e Y de intersección de las circunferencias dadas (O, AB) y (O_1, CD).

Demostración:

$$OX = 2^n \cdot a = 2^n \cdot \frac{AB}{2^n} = AB,$$

$$OY = 2^n \cdot \frac{AB}{2^n} = AB.$$

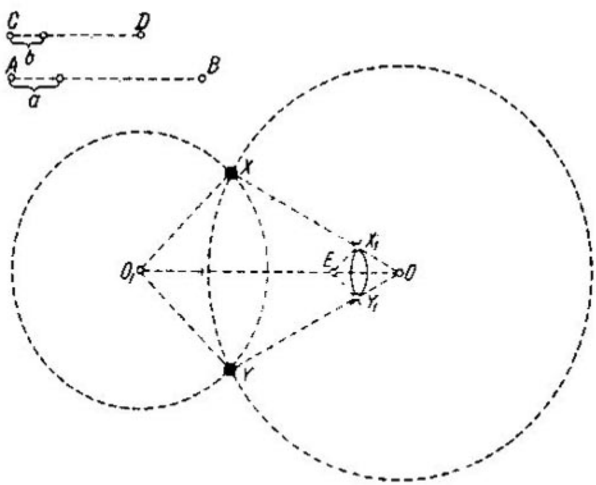
Puesto que los triángulos OXO_1 y OX_1E son semejantes

$\left(\frac{OX}{OX_1} = \frac{OO_1}{OE} = 2^n\right)$, el ángulo O_1OX es común), resulta:

$$O_1X = 2^n \cdot EX_1 = 2^n \cdot \frac{CD}{2^n} = CD.$$

De la misma manera obtendremos $O_1Y = CD$.

PROBLEMA 28. Construir el punto C_1 que sea simétrico al punto dado C con respecto de la recta dada AB.



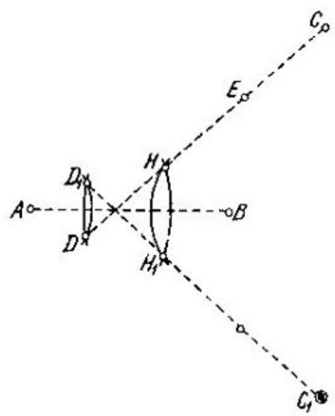
DIBUJO 38.

Construcción. Para $AC \leqslant R$ y $BC \leqslant R$, la construcción se da en el problema 1. Si la distancia entre el punto C y la recta dada AB es menor que R, entonces, aprovechando el problema 22, en recta siempre se puede encontrar los puntos A_1 y B_1 de tal modo que $CA_1 \leqslant R$ y $CB_1 \leqslant R$.

Supongamos ahora que la distancia entre el punto C y la recta dada AB es mayor que R. Podemos considerar que $AB < 2R$; en caso contrario encontremos estos puntos en la recta dada según el procedimiento empleado en el problema 22.

Tomemos en el plano un punto arbitrario E de tal modo que $CE \leqslant R$ y la recta CE pasa entre los puntos A y B. Tracemos el segmento $CD = mCE$ para lo que hacemos $CE = ... = HD$ (problema 2). El punto E y el número m se eligen así que los segmentos AD, AH, BD y BH no sean mayores que R.

Encontremos los puntos D_1 y H_1 simétricos a los puntos D y H respecto a la recta dada (problema 1). Tracemos el segmento $D_1C_1 = mD_1H_1$. El punto C_1 es buscado, simétrico al punto dado C respecto a la recta AB (dibujo 39).



DIBUJO 39.

La validez de la construcción es evidente.

PROBLEMA 29 (cuarta operación fundamental). Encontrar los puntos de intersección de la circunferencia dada (O, CD) con la recta prefijada mediante los puntos A y B.

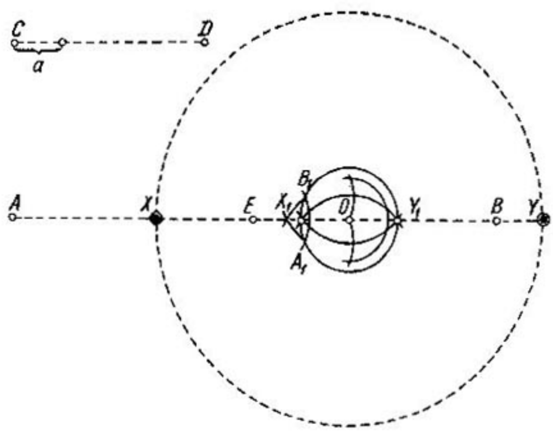
Construcción, cuando la recta no pasa por el centro de la circunferencia.

Construyamos el punto O_1 simétrico al centro O de la circunferencia dada respecto a la recta AB (problema 28). Determinemos los puntos X e Y en que se cortan las circunferencias

(O, CD) y (O_1, CD) (problema 27). Los puntos X e Y son buscados.

Construcción, cuando la recta pasa por el centro de la circunferencia [1] (dibujo 40).

Tracemos el segmento $r = \frac{CD}{2^n}$ con la condición de *que* $r \leqslant \frac{R}{2}$



DIBUJO 40.

(problemas 21 y 24). Describamos la circunferencia (O, r) y la cortemos en los puntos A_1 y B_1 por la circunferencia (A, d) o la (B, d), donde d es un segmento arbitrario que es menor o igual a R. Si incluso cuando $d = R$ las circunferencias (A, R) o (B, R) no intersecan la circunferencia (O, r) (en este caso $OA > R + r$ y $OB > R + r$), entonces al aplicar el procedimiento empleado en el problema 22, determinemos el punto E en la recta AB así que $OE < R + r$; la circunferencia (F, d) cortará (O, r) en los puntos A_1 y B_1. Al cambiar la magnitud del radio d es conveniente lograr que el segmento $a = A_1B_1 \leqslant \frac{R}{2}$.

[1] Para comprobar este hecho véase la observación del problema 1.

Dividamos ambos arcos A_1B_1 de la circunferencia (O, r) mediante los puntos X_1 e Y_1 por la mitad (problema 4). Tracemos los segmentos $OX = 2^n OX_1$ y $OY = 2^n OY_1$ (problema 2, $OX_1 = OY_1 = r \leqslant \frac{R}{2}\Big)$. Los puntos X e Y son los buscados de intersección de la recta dada con la circunferencia dada.

La mayor de las circunferencias descritas en curso de la construcción dada será la obtenida al dividir el arco A_1B_1 por la mitad. Cuando el arco se divide por la mitad (véase el problema 4) el radio de la circunferencia mayor es igual a $BC = \sqrt{2a^2 + r^2}$ (véase el dibujo 5). En nuestra construcción este radio será $\sqrt{2a^2 + r^2} \leqslant \sqrt{2\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} < R$.

PROBLEMA 30. Construir el segmento cuarto y proporcional a los tres segmentos dados a, b y c.

Construcción. Si $a \leqslant R$, $b \leqslant R$ y $c \leqslant R$, la construcción se puede ver en el problema 3.

Dado ahora que por lo menos una de las desigualdades indicadas no tiene lugar. Tracemos los segmentos $a_1 = \frac{a}{2^n}$, $b_1 = \frac{b}{2^n}$ y $c_1 = \frac{c}{2^m}$ (problemas 21 y 24), además los numeros naturales n y m se eligen de tal modo que $a_1 \leqslant R$, $b_1 \leqslant R$, $c_1 \leqslant R$ y $c_1 < 2a_1$.

Tracemos el segmento x_1 que sea cuarto y proporcional a los segmentos a_1, b_1 y c_1. Si ahora se traza el segmento $x = 2^m x_1$ (problemas 2 y 25), encontraremos el segmento buscado que será cuarto y proporcional a los tres segmentos dados a, b y c.

Demostración. La proporción

$$\frac{a}{2^n} : \frac{b}{2^n} = \frac{c}{2^m} : x_1$$

se puede escribir así:

$$a : b = c : 2^m x_1.$$

PROBLEMA 31 (quinta operación fundamental). Determinar el punto de intersección de las rectas dadas AB y CD cada una de las cuales está determinada mediante dos puntos.

La *construcción* del punto de intersección de las rectas dadas mediante un compás con abertura limitada se realiza del mismo modo como se ha hecho en el problema 7, sin embargo, en vez de los problemas 1 y 3, emplearemos los problemas 28 y 30, respectivamente. Para determinar el punto E apliquemos el problema 27.

Observación. A base del problema 22 es posible siempre elegir los puntos A, B, C y D (que determinan las rectas dadas) hasta tal grado próximos unos a otros que todas las circunferencias descritas en curso de esta construcción tendrán radios no mayores que R y, por consiguiente, pueden describirse por medio del compás con la abertura limitada de brazos.

Basándose sobre todo lo expuesto anteriormente en el párrafo dado llegamos a la conclusión siguiente.

Todas las cinco operaciones fundamentales (problemas más simples pueden cumplirse (resolverse) mediante un solo compás que describe las circunferencias, cuyos radios no superan cierto segmento R prefijado de antemano.

Cada problema geométrico de construcción que se resuelve con ayuda del compás y la regla, siempre se reduce al cumplimiento de una serie finita de las operaciones fundamentales que se realizan en un orden determinado (§ 1).

Entonces tiene lugar el teorema siguiente.

TEOREMA. *Todos los problemas geométricos de construcción que se resuelven con ayuda del compás y la regla, pueden solucionarse precisamente también mediante un solo compás que describe las circunferencias, cuyos radios no superan cierto segmento prefijado de antemano.*

Examinemos ahora el método general que se usa para solucionar los problemas de construcción mediante un solo compás, las aberturas de piernas del cual están limitadas por arriba con el segmento R.

Supongamos que es preciso solucionar cierto problema de construcción que se resulve con ayuda del compás y la regla, valiéndose sólo de un compás con abertura limitada de piernas. Imaginemos que este problema está resuelto con ayuda de un solo compás aplicando el método clásico en que el compás se usa libremente, cuando no se superponen algunas limitaciones sobre la abertura de brazos; como resultado obtendremos cierta figura Φ

compuesta de unas circunferencias solamente, cuyo número se toma finito. Designemos con R_1 el radio mayor de todas las circunferencias que forman la figura Φ. Si resulta que $R_1 \leqslant R$, entonces la construcción indicada puede cumplirse mediante el compás dado con abertura limitada de piernas.

Sea ahora $R_1 > R$. Tomemos el número natural n tal que $\frac{R_1}{2^n} \leqslant R$. Si ahora todos los segmentos que se dan en la condición del problema, incluyendo también los segmentos que determinan los radios de las circunferencias prefijadas, se disminuyen 2^n veces y luego se realiza la solución del problema, utilizando el compás dado, como resultado obtendremos la figura Φ'_1 que es semejante a la figura Φ con el coeficiente de semejanza igual a $\frac{1}{2^n}$. Todas las circunferencias de la figura Φ' pueden dibujarse con ayuda del compás dado, puesto que sus radios no son mayores que $\frac{R_1}{2^n}\left(\frac{R_1}{2^n} \leqslant R\right)$. Además, hay que señalar que si entre los datos expuestos en la condición del problema se encuentra cierta figura W en el plano del dibujo, entonces es necesario uno de los puntos de esta figura tomar como centro de semejanza O y trazar la figura W' semejante a la primera con el coeficiente de semejanza $\frac{1}{2^n}$, (es decir, disminuir la figura W 2^n veces).

Designemos con Ψ' aquella parte de la figura Φ' que se acepta por el resultado buscado. Tracemos la figura Ψ semejante a la figura Ψ' con el centro de semejanza O y el coeficiente de semejanza 2^n (aumentamos la figura Ψ' 2^n veces) para lo que trazamos los segmentos

$$OX_1 = 2^n OX'_1,\ OX_2 = 2^n OX'_2,\ \ldots,\ OX_k = 2^n OX'_k,$$

donde con X'_1, X'_2, ..., X'_k están designados todos los puntos de intersección de las circunferencias de la figura Ψ', y los centros de estas circunferencias. Los puntos X_1, X_2, ..., X_k de la figura Ψ serán centros y puntos de intersección de las circunferencias que forman esta figura.

La figura Ψ representa el resultado buscado de solución del problema dado. Las rectas y las circunferencias cuyos radios son mayores que R, no pueden dibujarse en la figura Ψ con ayuda del compás dado; pueden ser trazadas en forma de puntos que se adhieren de modo cualquier que sea denso unos a otros (problemas 22 y 26).

Para ilustrar todo lo expuesto se puede aducir la solución del problema 27. En esta resolución Φ está formada por las circunferencias (O, AB) y (O_1, CD). Los elementos dados son dos puntos O, O_1 (que representan la figura dada W) y dos segmentos AB y CD. La figura Φ' consta de las circunferencias (O, a) y (E, b) (junto con los centros O y E). La figura Ψ' que se acepta en la figura Φ' por el resultado buscado, consta de dos puntos X_1 e Y_1. El resultado buscado de solución es la figura Ψ formada por los puntos X e Y. O es el centro de semejanza (en el dibujo 38 se ha elegido $2^n = 4$, $n = 2$).

Al solucionar los problemas de construcción el número n suele ser desconocido, puesto que con el círculo dado no podemos trazar la figura Φ, y por tanto no conoceremos el radio R_1 de la circunferencia más grande entre las demás. Teniendo en cuenta esta circunstancia la solución del problema por medio del compás dado con abertura limitada se realiza hasta que lleguemos a la circunferencia del radio $r_1 > R$. Determinemos el número natural n_1 así, que $\dfrac{r_1}{2^{n_1}} \leqslant R$. Disminuyamos los segmentos dados 2^{n_1} veces y de nuevo empecemos la solución del problema dado; como resultado nosotros o bien resolveremos por completo el problema y trazaremos la figura Φ', o bien de nuevo llegaremos a la circunferencia del radio $r_2 > R$. Determinemos el número natural $n_2 \left(\dfrac{r_2}{2^{n_2}} \leqslant R \right)$ y de nuevo disminuyamos los segmentos 2^{n_2} veces (al mismo tiempo los segmentos, dados en la condición del problema, disminuirán $2^{n_1+n_2}$ veces), etc. Después de un número finito de pasos la figura Φ' será trazada.

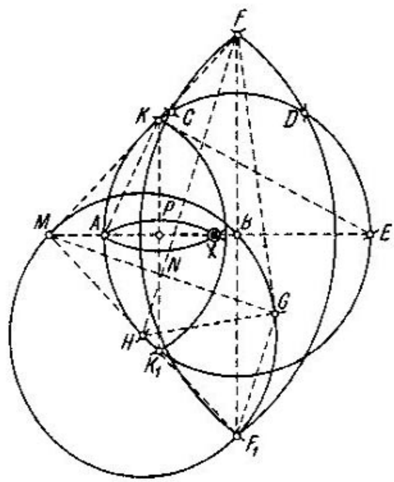
Utilizando el método general de solución no es difícil trazar por medio de un compás sólo con abertura limitada las figuras inversas al punto, a la recta o la circunferencia dados.

En conclusión del párrafo aduzcamos la solución del problema siguiente.

PROBLEMA 32. Dividir el segmento dado AB en cinco partes iguales, si no podemos tener un segmento cinco veces mayor que el segmento dado $AB = a$.

En la obra voluminosa de L. Mascheroni "La geometría del compás" este problema es único que está resuelto con la limitación indicada en la condición.

Construcción. Describamos la circunferencia (B, A) y hagamos $AC = CD = DE = a$ (dibujo 41). Tracemos las circunferencias (A, D)



DIBUJO 41.

y (E, C) hasta su encuentro en los puntos F y F_1. Marquemos el punto H de intersección de la circunferencia (F_1, AB) con la circunferencia (B, A). Describamos luego las circunferencias (H, F_1) y (F, AE) y en la intersección obtengamos el punto G. En la circunfeencia (B, A) tracemos las cuerdas $AK = AK_1 = F_1G$. Si se trazan las circunferencias (K, A) y (K_1, A), entonces en la intersección marcaremos el punto buscado X. El segmento

$$BX = \frac{1}{5} AB.$$

Demostración. Supongamos que en la circunferencia (H, F_1) el punto M es diametralmente opuesto al punto F_1 y que N es el punto de intersección de las rectas HF y MG. El segmento $BF = BF_1 = \sqrt{2}\,AB$. La longitud de la tangente trazada desde el punto F hacia la circunferencia (H, F_1) es igual a

$$b = \sqrt{FF_1 \cdot FB} = \sqrt{2\sqrt{2}\,AB \cdot \sqrt{2}\,AB} = 2AB.$$

Pero, por otro lado, $FG = 2AB$ según la construcción, lo que significa que la recta FG toca la circunferencia (H, F_1) en el punto G.

Del triángulo rectángulo FGH se deduce que

$$HF = \sqrt{HG^2 + GF^2} = \sqrt{5}\,AB.$$

El triángulo FMF_1 es isósceles, puesto que el ángulo F_1BM es recto y se apoya sobre el diámetro F_1M de la circunferencia (H, F_1). Esto significa que $MF_1 = MF = 2AB$.

El triángulo MGF también es isósceles ($MF = FG = 2AB$), por eso $MG \perp HF$.

Del triángulo rectángulo HGF para el que el segmento GN es altura, obtenemos

$$HG^2 = a^2 = HF \cdot HN = \sqrt{5}\,a \cdot HN$$

ó

$$HN = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

De los triángulos rectángulos HNG y MGF_1 encontramos:

$$NG = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}MG,$$

$$GF_1^2 = 4a^2 - \frac{16a^2}{5} = \frac{4a^2}{5}.$$

Y, por fin, del triángulo rectángulo AKE tenemos:

$$AK^2 = GF_1^2 = AE \cdot AP = 2AB \cdot \frac{AX}{2} = AX \cdot AB$$

ó

$$AX = \frac{GF_1^2}{a} = \frac{4a}{5}.$$

De aquí

$$BX = \frac{1}{5} AB.$$

§ 6. CONSTRUCCIONES MEDIANTE UN COMPÁS CON ABERTURA DE VARILLAS LIMITADA POR ABAJO

En este párrafo utilizaremos el compás cuyas aberturas de varillas están limitadas sólo por abajo mediante un segmento R_{min} prefijado de antemano. Con ayuda de este compás se puede describir las circunferencias de todo radio que sea mayor o igual al segmento R_{min}. En ulterior en vez de R_{min} escribiremos simplemente R.

PROBLEMA 33. Trazar el segmento n veces mayor que el segmento dado AA_1.

Construcción. Tracemos el segmento A_1E que es perpendicular al segmento dado AA_1(problema 8, tomamos $OA \geqslant R$). Determinemos el punto E' que es simétrico al punto E respecto a la recta AA_1 (problema 1, aquí $AE > R$ y $A_1E > R$). Determinemos el punto A_2 que es simétrico al punto A respecto a la recta EE'. El segmento $AA_2 = 2AA_1$ (dibujo 42).

Describamos luego la circunferencia (E, A) y tracemos las cuerdas $AB_1 = B_1C_1 = C_1E_1$ que son iguales al radio. El segmento $A_2E_1 \perp AA_2$. Encontremos el punto E_1' que es simétrico al punto E_1 respecto a la recta AA_2. Si ahora se hallan los puntos A_3 y A_4 que son simétricos a los puntos A_1 y A, respectivamente, entonces tendremos

$$AA_3 = 3AA_1, \quad AA_4 = 4AA_1.$$

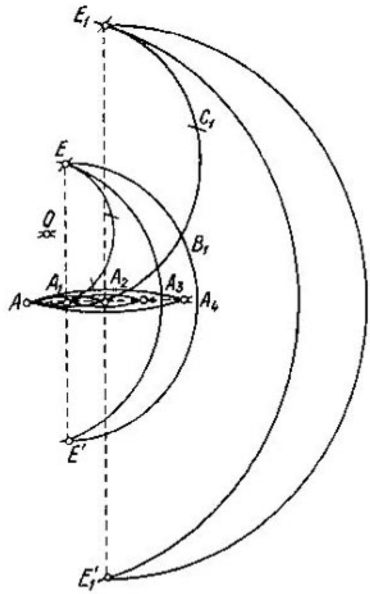
En ulterior la construcción se repite de modo análogo.

Si $AA_1 \geqslant R$, entonces la construcción se da en el problema 2.

Los radios de todas las circunferencias aducidas en esta construcción no son menores que el segmento R.

Observación. Con toda la evidencia de la construcción expuesta se deduce que los puntos A_2, A_4, A_8, A_{16}, ... pueden construirse inmediatamente, omitiendo en esta construcción los puntos A_3,

A_5, A_6, A_7, A_9, ... etc., es decir, encontrar los segmentos que sean 2, 4, 4, 8, 16, ..., 2^n veces mayores que el segmento dado AA_1.



DIBUJO 42.

PROBLEMA 34. Trazar el segmento igual a $\frac{1}{n}$ del segmento dado AB (es decir, dividir el segmento en n partes iguales).

Construcción. Si $AB \geqslant R$, entonces la construcción se da en el problema 9.

Sea ahora $AB < R$. Tracemos el segmento $AB' = mAB$ (problema 33) y, además, el número natural m se toma tal que $AB' \geqslant R$. Dividamos el segmento en $n \cdot m$ partes iguales (problema 9). Obtenemos el segmento buscado $AX = \frac{AB'}{n \cdot m}$.

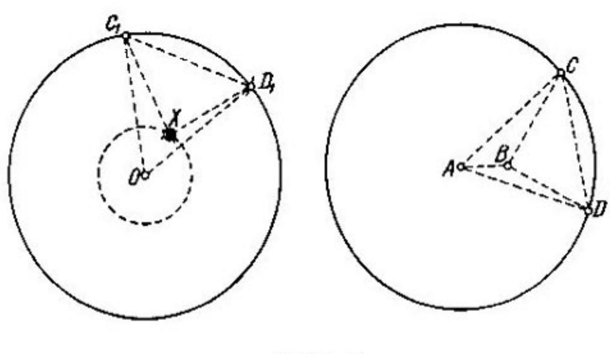
En realidad, $AX = \frac{AB'}{n \cdot m} = \frac{mAB}{n \cdot m} = \frac{AB}{n}$.

Observación. Si en el caso dado en vez de la construcción usada en el problema 9 se emplea la construcción del problema 10, obtendremos el segmento $AX = \frac{1}{2^n} AB$.

La solución del problema 5 también sirve para un compás que tiene abertura de brazos limitada por abajo.

PROBLEMA 35 (segunda operación fundamental). Desde el punto dado O como centro, describir la circunferencia de radio $AB = r$.

Construcción. Si $AB \geqslant R$, la circunferencia se describe directamente con ayuda del compás dado. Pero si $AB < R$, entonces no podemos dibujar mediante el compás dado las circunferencias



DIBUJO 43.

en forma de una curva continua; en este caso es posible obtener un número arbitrario de puntos que se sitúan de modo cualquier que sea denso en la circunferencia prefijada por el centro y el radio.

Sea $AB < R$. Con un radio arbitrario $a > R + r$ describamos las circunferencias (O, a) y (A, A) y en la segunda de éstas tomemos dos puntos C y D de tal modo que $CD \geqslant R$. Si ahora en la circunferencia (O, a) se traza la cuerda $C_1D_1 = CD$ y se describen las circunferencias (C_1, CB) y (D_1, DB), entonces en la intersección obtendremos el punto X que se halla sobre la circunferencia dada (O, r). Al cambiar la posición de la cuerda C_1D_1 en la circunferencia (O, a) se puede construir cualesquier que sean puntos de la circunferencia dada.

La validez de la construcción descrita se deduce inmediatamente de la igualdad que hay entre los triángulos $ACD = OC_1D_1$ y $BCD = XC_1D_1$.

Indiquemos ahora el método general usado para solucionar los problemas geométricos de construcción mediante un compás cuyas aberturas de varillas están limitadas por abajo con el segmento R. Aplicando este método se puede solucionar cualquier problema de construcción resoluble con ayuda del compás y la regla, incluyendo también los problemas fundamentales más simples tercer, cuarto y quinto.

El método general empleado para resolver los problemas de construcción con un compás que describe las circunferencias cuyo radio no es menor que R, coincide con el método general usado para solucionar los problemas, expuesto en el § 5.

La diferencia entre estos métodos consiste en el hecho de que los segmentos dados en la condición del problema no es necesario disminuir 2^n veces, sino, que al revés, aumentar n veces (o 2^n veces) (problema 33). A continuación hay que trazar la figura Φ' que será semejante a la figura Φ y n veces mayor que la primera. El número n se toma tal que todas las circunferencias de la figura Φ' tengan los radios mayores que R y, por lo tanto, podrían ser descritas con ayuda del compás dado ($nR_1 \geqslant R$), donde R_1 es el radio de la menor circunferencia en la figura Φ. La figura Ψ que representa en sí el resultado buscado de solución del problema, se traza n veces menor que la figura Ψ' (problema 34).

De esta forma hemos llegado al teorema siguiente.

TEOREMA *Todos los problemas geométricos de construcción resolubles con ayuda del compás y la regla, pueden solucionarse precisamente utilizando un solo compás que describe las circunferencias cuyos radios no son menores que un cierto segmento prefijado de antemano.*

§ 7. CONSTRUCCIONES MEDIANTE UN COMPÁS CON ABERTURA CONSTANTE DE VARILLAS

Las construcciones geométricas mediante un compás con abertura constante que permite describir las circunferencias solamente del radio R se examinaron por muchos científicos. Una parte considerable de la obra del matemático árabe Abu-Vafa "Libro de construcciones geométricas" está dedicada a este problema. En la solución de los problemas de construcción mediante un compás con abertura constante se ocupaban Leonardo de Vinci, Cardano, Tartaglia, Ferrari y otros.

Empleando el compás con abertura constante e igual a R podemos levantar perpendicular al segmento AB en su extremo, si solamente $AB < 2R$ (problema 8); podemos aumentar el segmento R 2, 3, 4, ... veces (problema 2). Si $AB < 2R$ y $AB \neq R$, entonces es posible construir los puntos de la recta AB (problema 5), cambiando además cada vez la posición de los puntos simétricos C y C_1. Sin embargo no podemos dividir con ayuda de este compás los segmentos y las cuerdas en partes iguales, encontrar los segmentos proporcionales, etc.

De este modo, *con ayuda de un solo compás con abertura constante es imposible solucionar todos los problemas de construcción que pueden resolverse por medio del compás y la regla.*

Tomando en consideración los resultados obtenidos en los § 5, 6 y 7 conviene señalar que aquí queda sin solución el problema acerca de la posibilidad de resolver los problemas geométricos de construcción mediante un compás con abertura limitada de varillas simultáneamente tanto por arriba, como por abajo, es decir, mediante el compás con que se puede describir las circunferencias de radio no menor que $R_{mín}$ y no mayor que $R_{máx}$.

¿ Qué problemas se puede solucionar usando dicho compás? ¿Es posible o no solucionar todos los problemas de construcción resolubles con ayuda del compás y la regla? Si esto es así, ¿puede o no la diferencia $R_{máx} - R_{mín}$ ser cualquier que sea pedueña? En otras palabras, es posible o no solucionar todos los problemas de construcción que se resuelven empleando el compás y la regla, mediante el compás con abertura "casi" constante. Como ya hemos señalado al principio del párrafo dado todos estos problemas no se puede solucionar [1] mediante un sólo compás con abertura c o n s t a n t e.

Según nos parece, cierto interés presentan también los problemas siguientes que casi no se han descrito en la literatura.

1. La investigación de las soluciones de problemas geométricos de construcción aprovechando el compás con abertura limitada (sólo por abajo y sólo por arriba o simultáneamente por abajo y por arriba) y con la regla de longitud constante. La indicación de los métodos más simples de construcciones.

2. El estudio de las construcciones geométricas realizadas con una sola regla (construcción de Steiner), cuando en el plano del dibujo está dada una circunferencia auxiliar (O, R) y la regla tiene una longitud constante l. Además tienen importancia los casos de $l < R$ y $l > R$.

§ 8. CONSTRUCCIONES MEDIANTE UN COMPÁS A LA CONDICIÓN DE QUE TODAS LAS CIRCUNFERENCIAS PASEN POR UN MISMO PUNTO

En este párrafo examinaremos la solución de los problemas geométricos de construcción realizados mediante un solo compás, a la condición de que todas las circunferencias descritas pasarán a través de un mismo punto del plano [2].

DEFINICIÓN. Como el ángulo de intersección de las dos circunferencias (en caso general, de las dos líneas curvas) se entiende

[1] *Observación para la edición en español.* Después de salir a la luz la edición rusa del folleto presente el autor se enteró de que en 1931 el matemático japonés Kitizi Yanagihara había resuelto este problema. El demostró que: "todos los problemas de construcción resolubles con el compás y la regla, pueden solucionarse con precisión mediante un solo compás también, si la magnitud del radio está limitada simultáneamente tanto para arriba, como por abajo con los segmentos R_1 y R_2 $(R_1 \leqslant r \leqslant R_2)$. K. Yanagihara, On limited Mascheroni geometrical construction, The Tohoku Math. J. 34, 1931.

[2] En este párrafo no se superponen algunas limitaciones sobre aberturas del compás.

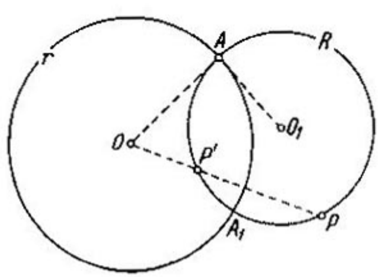
el ángulo formado por dos tangentes trazadas hacia estas circunferencias (líneas curvas) en el punto de su intersección. Las circunferencias se llaman **o r t o g o n a l e s** si se cruzan bajo el ángulo recto.

TEOREMA 1. *Si la circunferencia* (O_1, R) *se cruza con la circunferencia de inversión* (O, r) *de modo ortogonal, entonces aquella es inversa a sí misma*[1].

Demostración. Si las circunferencias se intersecan de modo ortogonal, entonces el ángulo OAO_1, formado por los radios trazados hacia el punto de intersección de estas circunferencias es igual al ángulo recto. Esto significa que la recta OA es tangente trazada hacia la circunferencia (O_1, R) en el punto A y

$$OP \cdot OP' = OA^2 = r^2.$$

La última igualdad es válida para cualquier secante OP. El punto P' es de inversión al punto P. El arco APA_1 de la circunferencia (O_1, R) es inverso al arco $AP'A_1$ (dibujo 44).



DIBUJO 44.

En el problema 11 se ha dado el trazado del segmento que es 3^n veces mayor que el segmento dado AA_0. En proceso de esta construcción todas las circunferencias pasan por el punto A. La excepción representa la circunferencia (A, A_0) que describimos para determinar los puntos E y E', al trazar las cuerdas $AE = EC$ y $AE' = E'C'$.

[1] Es válido también el teorema inverso, sin embargo en el párrafo dado éste no se aplicará.

Sin embargo es posible no dibujar la circunferencia (A, A_0), sino que actuar del modo siguiente.

Hagamos la abertura del compás igual a AA_0 y coloquemos la punta del lápiz en el punto A, luego, sin cambiar la abertura del compás, situemos la varilla de modo que la punta de aguja caiga sobre el arco de la circunferencia (A_0, A). La punta de aguja del compás se ubicará en el punto E o en el E'. Si ahora se describe la circunferencia (E, A), entonces en la intersección con la circunferencia (A_0, A) construiremos el punto C. Del mismo modo se puede trazar el punto C'.

Por consiguiente puede trazarse el segmento 3^n veces mayor que el dado (problema 11) para que todas las circunferencias pasen por un mismo punto.

Las soluciones de los problemas 15, 16, 17 se han realizado así (véanse los dibujos 26, 28, 29) que todas las circunferencias pasen por un mismo punto O que es el centro de inversión. Para que en el trazado del punto X que es inverso al punto C siendo $OC \leqslant \frac{r}{2}$ (problema 15) también todas las circunferencias descritas, sin excepción, pasen por el mismo punto O, es preciso en vez del segmento $OC_1 = nOC > \frac{r}{2}$ (dibujo 27), trazar el segmento $OC_1 = 3^n \cdot OC > \frac{r}{2}$ (problema 11, tomando en consideración las observaciones que se han hecho al comienzo de este párrafo) y trazar $OX = 3^n \cdot OC_1'$.

Entonces, al usar un compás se puede obtener el punto inverso al punto dado, describir la circunferencia que pase por el centro de inversión y que sea inversa a la recta dada y trazar la recta inversa a la circunferencia que pasa por el centro O, describiendo además las circunferencias a través del mismo punto O, es decir, centro de inversión.

Como ya hemos señalado en la "Introducción" J. Steiner demostró que todos los problemas de construcción resolubles mediante el compás y la regla, pueden solucionarse empleando una sola regla, si en el plano del dibujo se da una circunferencia constante (auxiliar) (O_1, R) y su centro.

Supongamos ahora que cierto problema de construcción está resuelto por el método de Steiner; como resultado en el plano del dibujo se obtendrá la figura Φ compuesta además de la circunferencia auxiliar, sólo de las líneas rectas. Tomemos una circunferencia arbitraria (O, r) con la única condición de que el centro O no se halle sobre la circunferencia (O_1, R) y no se encuentre sobre ninguna de las rectas de la figura Φ, y aceptémosla por la circunferencia de inversión. Trazamos la figura Φ' que sea inversa a la figura Φ. La figura trazada Φ' será constituida sólo de las circunferencias las que, a excepción de las dos [circunferencia de inversión (O, r) y la circunferencia que es inversa a (O_1, R)], pasarán por un mismo punto O que es el centro de inversión.

Si la circunferencia de inversión (O, r) interseca la circunferencia auxiliar (O_1, R) bajo el ángulo recto, entonces, en virtud del teorema 1 la circunferencia (O_1, R) es inversa a sí misma. La figura Φ se compone de las líneas rectas, la circunferencia (O_1, R) y, puede ser, de los puntos aislados; la figura Φ' inversa a la primera se formará por la circunferencia (O_1, R), las circunferencias que pasan por el centro de inversión O, las rectas inversas, y puede ser, los puntos aislados. Para trazar la figura Φ' será necesario aprovechar solamente los problemas 15 y 16.

Así, al trazar la figura Φ' que es inversa a la figura Φ, si la circunferencia de inversión interseca la circunferencia auxiliar bajo el ángulo recto, todas las circunferencias, incluyendo también las circunferencias con ayuda de las cuales se realiza la construcción de la figura Φ', pasarán por un mismo punto O, a excepción de sólo dos circunferencias: circunferencia de inversión (O, r) y circunferencia (O_1, R).

Para ilustrar lo expuesto anteriormente resolvemos el problema siguiente.

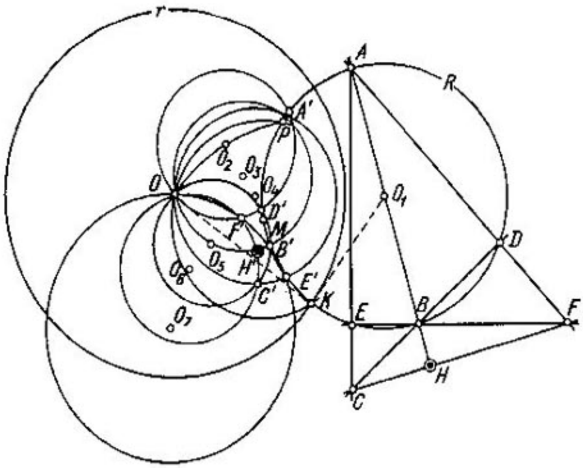
PROBLEMA 36 Dada la circunferencia (O_1, R) y el punto A que se encuentra en ésta. Bajar la perpendicular del punto dado C sobre la recta O_1A empleando una regla.

Construcción. Tracemos la recta O_1A hasta su intersección con la circunferencia (O_1, R). Si ahora se trazan las rectas AC y BC y designemos los puntos E y D en que éstas se cruzan con la circunferencia (O_1, R). Si ahora se trazan las rectas AD y BE hasta su encuentro en el punto F, la recta CF será perpendicular a la recta O_1A. Designemos con H la base de perpendicular (dibujo 45).

Demostración. Los segmentos CD y EF son alturas del triángulo AFC, puesto que los ángulos ADB y AEB son rectos, $FC \perp AB$, ya que las tres alturas del triángulo se cruzan en un punto B.

En este problema la figura Φ está constituida por la circunferencia

(O_1, R) y seis rectas AB, AC, AD, CD, CF y EF. Determinemos al principio el punto O y el radio r de modo que las circunferencias (O, r) y (O_1, R) se intersecan ortogonalmente. Para esto



DIBUJO 45.

aprovechamos de la solución del problema 8 (2° procedimiento); tomemos en la circunferencia (O_1, R) dos puntos arbitrarios K y M y tracemos $KO \perp KO_1$ (problema 8), para lo cual describamos las circunferencias (M, K) y(K,PK) hasta su encuentro en el punto O (dibujo 45). El punto P obtendremos en la intersección de las circunferencias (M, K) y (O_1, R).

Cambiando la posición de los puntos K y M se puede construir el punto O que no se halla sobre ninguna de las rectas de la figura Φ. La circunferencia (O, K) corta con la circunferencia dada (O_1, R) bajo el ángulo recto y puede tomarse por la circunferencia de inversión; $OK = r$.

La figura Φ' es inversa a la figura Φ, se compone de siete circunferencias (O_2, O), (O_3, O), (O_4, O), (O_5, O), (O_6, O), (O_7, O) y $(O_1 R)$. [La circunferencia (O_1, R) es inversa a sí misma]. Las primeras seis circunferencias pasan por el centro de inversión O y son inversas respectivamente a las rectas AF, AB, AE, CD,

CF, y EF de la figura Φ. Los puntos A', B', C', D', E', F' y H' de la figura Φ son inversos a los puntos A, B, C, D, E, F y H, respectivamente. Todas las circunferencias que se han trazado para describir las primeras seis circunferencias de la figura Φ', y también las circunferencias (M, K) y (K, P) están dibujadas para determinar el centro de inversión O y pasarán por un mismo punto del plano O.

De aquí se deduce el teorema:

TEOREMA II. *Cada problema geométrico de construcción resoluble empleando el compás y la regla, se puede solucionar valiéndose de un solo compás de modo que todas las circunferencias de construcción, a excepción de las dos* (circunferencia de inversión y la auxiliar de Steiner) *pasarán por un mismo punto que es el centro de inversión O.*

Supongamos ahora que cierto problema de construcción está resuelto por el método Steiner; como resultado obtendremos la figura Φ compuesta de la circunferencia (O_1, R) y las rectas, una parte de las cuales pasa por el centro O_1. Si la circunferencia auxiliar (O_1, R) se toma como las circunferencias de inversión y se construye la figura Φ' que sea inversa a la figura Φ, entonces la figura dibujada Φ' será compuesta de las *líneas rectas* y las *circunferencias* para que todas estas rectas y circunferencias, a excepción de la circunferencia (O_1, R) pasarán por un mismo punto O_1[1] prefijado de antemano.

De aquí se deduce el teorema.

TEOREMA III. *Cada problema geométrico de construcción siempre se puede solucionar usando el compás y la regla así que todas las rectas y las circunferencias, a excepción de una circunferencia*

[1] A. Adler en [1] (véase pág. 80) afirma (§ 20) que si la circunferencia auxiliar de Steiner (O_1, R) se acepta por la de inversión, entonces: "No sólo es posible, como lo demostró en su tiempo Mascheroni, solucionar todos los problemas geométricos constructivos de segundo grado, al emplear exclusivamente un compás, sino se puede plantear incluso una condición más de que *todas las circunferencias que forman parte de construcción, a excepción de una de éstas, pasen por un mismo punto elegido arbitrariamente*".

La equivocación de esta afirmación se deduce del hecho de que todos los problemas de construcción resolubles con ayuda del compás y la regla, no se puede solucionar valiéndose de una sóla regla, si el centro de la circunferencia auxiliar O_1 no se conoce, es decir, si a través del centro O_1 no se trazan las líneas rectas [que son inversas a si mismas (teorema II § 3) y, por consiguiente, pertenecerán a la figura Φ'].

(circunferencia de inversión) *pasen por un mismo punto prefijado de antemano que es el centro de inversión.*

Supongamos ahora que para solucionar los problemas geométricos de construcción aprovechando un solo compás se permite usar una vez la regla (o supongamos que en el plano del dibujo se encuentra la línea recta AB trazada mediante la regla). Elijamos una circunferencia arbitraria (O, r) con el centro O que se halla sobre la recta AB, como la circunferencia de inversión y tracemos la circunferencia (O_1, R) que es inversa a la recta dada (problema 16). La circunferencia (O_1, R) pasa por el centro de inversión O y $R = OO_1$.

La solución de todo el problema de construcción por el método de Steiner son la circunferencia auxiliar (O_1, R) dará la figura Φ que se compone sólo de las líneas rectas y la circunferencia (O_1, R); la figura Φ' que es inversa a la primera, además de la recta AB, será formada solamente por las circunferencias que pasan por el centro de inversión O. Además supongamos que ninguna de las rectas, al solucionar el problema por el método de Steiner, ha pasado por el punto O que se encuentra sobre la circunferencia auxiliar (O_1, R); en caso contrario como la circunferencia auxiliar (O_1, R); en caso contrario como la circunferencia de inversión (O, r) conviene aceptar alguna otra circunferencia.

Si la línea recta AB no está trazada, pero se permite usar una vez la regla, entonces en el plano del dibujo elijamos una circunferencia arbitraria (O_1, R) en calidad de la auxiliar y resolvemos el problema propuesto empleando el método de Steiner. Luego tomemos en esta circunferencia un punto arbitrario O a la condición de que éste no se encuentre sobre ninguna de las rectas de figura Φ. Con el radio $r < 2R$ describamos la circunferencia (O, r) y designemos a través de A y B los puntos de su intersección con la circunferencia (O_1, R). Tomemos la regla y tracemos la recta AB que será inversa a la circunferencia (O_1, R), si se considera (O, r) como la circunferencia de inversión Luego tracemos la figura Φ' que sea inversa a la figura Φ.

TEOREMA IV. *Si en el plano del dibujo está trazada una línea recta todos los problemas de construcción resolubles, usando el compás y la regla, pueden solucionarse valiéndose de un sólo compás de manera que todas las circunferencias de esta construcción a excepción de una* (circunferencia de inversión), *pasen por un mismo punto del plano.*

Este teorema tiene cierta analogía con el teorema fundamental de Steiner para la construcción con una sola regla en presencia de una circunferencia constante.

Sea trazada actualmente en el plano del dibujo, empleando la regla, cierta figura Ψ compuesta de las líneas rectas y los segmentos (por ejemplo, dos líneas paralelas o un paralelógramo, etc.).

Supongamos ahora que hemos resuelto cualquier problema de construcción aplicando el método de Steiner, al tomar la figura Ψ como auxiliar. Entonces obtendremos cierta figura Φ compuesta sólo de las líneas rectas. La figura Ψ es una parte de la figura Φ.

Tomemos una circunferencia arbitraria (O, r) a la condición de que el centro O no se halle sobre ninguna de las rectas de la figura Φ como la circunferencia de inversión y tracemos la figura Φ′ que sea inversa a la figura Φ. La figura Φ′ será compuesta de las circunferencias que pasan por un punto O que es el centro de inversión.

TEOREMA V *Si en un plano está prefijada* (dibujada) *cierta figura compuesta de las líneas rectas y los segmentos, entonces todos los problemas de construcción que se puede solucionar por el método de Steiner, aceptando esta figura por la auxiliar, siempre es posible resolver valiéndose de un solo compás de tal que todas las circunferencias, a excepción de una* (circunferencia de inversión), *pasen por un mismo punto que se elige arbitrariamente en el plano del dibujo.*

BIBLIOGRAFÍA

1. **Adler. A.**, Teoria de las construcciones geométricas, Odesa, 1924, ed. en ruso.
2. **Alexandrov I. I.**, Recolección de los problemas geométricos de construcción, Moscú, 1950, ed. en ruso.
3. **Argunov B. I.** y **Blank M. B.**, Construcciones geométricas en el plano, Moscú, 1955, ed. en ruso.
4. **Voronets A. M.**, Geometría del compás, Moscú, 1934, ed en ruso.
5. **Zatel S. I.**, Geometría de la regla y geometría del compás, Moscú, 1950, ed en ruso.
6. **Kostovski A. N.**, Acerca de la posibilidad de solucionar los problemas de construcción empleando el compás con abertura limitada de varillas, Memorias científicas de la Universidad estatal de Lvov, 24, 1954, ed. en ucraniano.
7. **Kostovski A. N.**, Solución de los problemas geométricos de construcción un solo compas con abertura limitada. Sección de mecánica y matemáticas de la Universidad estatal de Lvov, 44, 1957, ed. en ucraniano.
8. **Kutuzov B. V.**, Geometría, Moscú, 1955, ed. en ruso.
9. **Curant R.** y **Robbins G.**, Qué son matemáticos, Moscú, 1947, ed. en ruso.
10. **Mascheroni L.**, La geometría del composso, Pavia, 1797, ed. en italiano.
11. **Metodología** de solución de los problemas de construcción en la escuela media, bajo la redacción del profesor E. Ya. Asriab y del profesor S. O. Smogorzhevski, Kiev, 1940, ed. en ucraniano.
12. **Teslenko I. F.**, Método de inversión y su aplicacion, Kiev, 1954, ed en ucraniano.
13. **Rademacher G.** y **Teplits O.**, Números y figuras, Sección de la Información Científica, y Técnica, 1936, ed. en ruso.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

V.G. Boltianski

¿Qué es el cálculo diferencial?

G.E. Shílov

Análisis matemático en el campo de funciones racionales

A.S. Smogorzhevski

Acerca de la geometría de Lobachevski

A.O. Guelfond

Resolución de ecuaciones en números enteros

A.I. Markushévich

Curvas maravillosas

Números complejos y representaciones conformes

Funciones maravillosas

Editorial MIR Moscú